



8.4 线性多步法

8.4.1 基于数值积分的方法

8.4.2 基于Taylor展开的方法

8.4.2 基于Taylor展开的方法



8.4 线性多步法

常微分方程初值问题 (8.1.1) 的数值解法中, 除了 **Runge-Kutta** 型公式等单步法之外, 还有另一种类型的解法, 即某一步的公式不仅与前一步解的值有关, 而且与前若干步解的值有关, 利用前面多步的信息预测下一步的值, 这就是多步法的基本思想, 可以期望获得较高的精度。构造多步法有多种途径, 下面先讨论基于数值积分的方法。



8.4.1 基于数值积分的方法

将 (8.1.1) 中的方程在区间 $[x_n, x_{n+1}]$ 上积分, 可以得到

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx. \quad (8.4.1)$$

如推导 **Newton-Cotes** 求积公式一样, 用等距节点的插值多项式来替代被积函数, 再对插值多项式积分, 这样就得到一系列求积公式。

例如, 用梯形方法计算积分项

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))],$$



代入 (8.4.1) 式有

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + \frac{h}{2} [f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))].$$

据此即可导出公式 (8.1.4)。

一般地, 设由 $r+1$ 个数据点 $(x_n, f_n), (x_{n-1}, f_{n-1}), \dots, (x_{n-r}, f_{n-r})$

构造插值多项式 $P_r(x)$, 这里, $f_k = f(x_k, y_k)$, $x_k = x_0 + kh$ 。

运用插值

公式有

$$P_r(x) = \sum_{j=0}^r f_{n-j} l_j(x), \quad l_j(x) = \prod_{k=0, k \neq j}^r \frac{x - x_{n-k}}{x_{n-j} - x_{n-k}}.$$

将 (8.4.1) 离散化即得下列计算公式



$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=0}^r \alpha_{rj} f_{n-j}, \quad (8.4.2)$$

其中

$$\alpha_{rj} = \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} l_j(x) dx = \int_0^1 \prod_{k=0, k \neq j}^r \frac{t+k}{k-j} dt, \quad j = 0, 1, \dots, r.$$

由此可得 (8.4.2) 中的系数，其具体数值见表8-6。公式 (8.4.2) 是一个 $r+1$ 步的显式公式，称为 **Adams显式公式**。 $r=0$ 时，即为 **Euler公式**。



表 8-6

j	0	1	2	3	4
α_{0j}	1				
$2\alpha_{1j}$	3	-1			
$12\alpha_{2j}$	23	-16	5		
$24\alpha_{3j}$	55	-59	37	-9	
$720\alpha_{4j}$	1901	-2774	2616	-1274	251

应用实例： 考虑跳伞员的下落速度。

自由落体运动可用牛顿第二定律描述： $\mathbf{F}=\mathbf{ma}$ 。实验表明，空气阻力模型为 $F = kv^p$ ，其中 $1 \leq p \leq 2$ ，比例系数 \mathbf{k} 依赖于物体的大小、形状，空气的密度和粘度。跳伞员下落的速度可描述为下列模型：



$$m \frac{dv}{dt} = k(-v)^p - mg, \quad v(0) = 0,$$

负号表示下降。显然，当 $1 < p < 2$ 时，适合于数值方法求解。

设 $k/m = 1.5$ ， $g=32$ ，先用中点法提供开始值，再用下列两步而阶方法

$$v_{i+1} = v_i + \frac{h}{2}(f_i - f_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots$$

求其他需要计算的值。当 $p=1$ 时，取 $h=0.2$ 有



$$\begin{aligned}v_0 &= 0, \quad v_1 = -5.4400, \quad v_2 = -9.3920, \quad v_3 = -12.3816, \\v_4 &= -14.6187, \quad v_5 = -16.2975, \quad v_6 = -17.5564, \quad v_7 = -18.5007, \\v_8 &= -19.2088, \quad v_9 = -19.7400, \quad v_{10} = -20.1383, \quad v_{11} = -20.4371, \\v_{12} &= -20.6611, \quad v_{13} = -20.8292, \quad v_{14} = -20.9552, \quad v_{15} = -21.0497.\end{aligned}$$

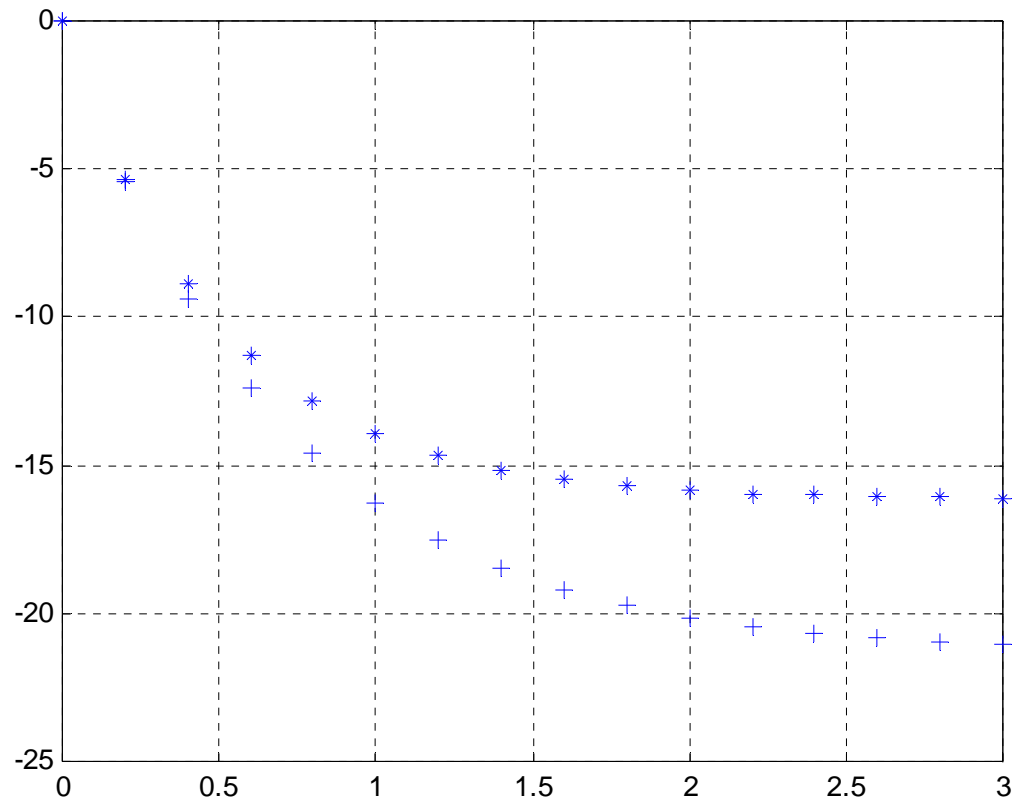
可见，三秒末跳伞员的末速度约有 **21ft / sec** 。

若将模型修改为 **p=1.1**，取 **h=0.2**，则有计算结果：

$$\begin{aligned}v_0 &= 0, \quad v_1 = -5.3216, \quad v_2 = -8.8911, \quad v_3 = -11.2565, \\v_4 &= -12.8630, \quad v_5 = -13.9411, \quad v_6 = -14.6674, \quad v_7 = -15.1552, \\v_8 &= -15.4830, \quad v_9 = -15.7030, \quad v_{10} = -15.8508, \quad v_{11} = -15.9500, \\v_{12} &= -16.0165, \quad v_{13} = -16.0612, \quad v_{14} = -16.0912, \quad v_{15} = -16.1113.\end{aligned}$$



可见三秒末跳伞员的末速度减慢了。计算结果如下图所示



+ 表示 $p=1$ 时的解，* 表示 $p=1.1$ 时的解



在上述Adams显式公式的推导中，选用了 $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-r}$ 作为插值节点。这样的插值多项式 $P_r(x)$ 在求积区间 $[x_n, x_{n+1}]$ 上逼近 $f(x, y(x))$ 是一个外推结果。为了改善逼近效果，我们变外推为内推，即改用 $x_{n+1}, x_n, \dots, x_{n-r+1}$ 为插值节点，用数据点 $(x_{n+1}, f_{n+1}), (x_n, f_n), \dots, (x_{n-r+1}, f_{n-r+1})$ 构造插值多项式 $P_r(x)$ ，则有

$$P_r(x) = \sum_{j=0}^r f_{n-j+1} l_j(x), \quad l_j(x) = \prod_{k=0, k \neq j}^r \frac{x - x_{n-k+1}}{x_{n-j+1} - x_{n-k+1}}。$$

于是我们有如下的计算公式



$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=0}^r \beta_{rj} f_{n-j+1}, \quad (8.4.3)$$

其中

$$\beta_{rj} = \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} l_j(x) dx = \int_{-1}^0 \prod_{k=0, k \neq j}^r \frac{t+k}{k-j} dt, \quad j = 0, 1, \dots, r,$$

其具体数值见表 8-7。公式 (8.4.3) 是隐式公式，称为 **Adams** 隐式公式。

r=0, 1 时分别为隐式 **Euler** 公式和梯形公式。



表8-7

j	0	1	2	3	4
β_{0j}	1				
$2\beta_{1j}$	1	1			
$12\beta_{2j}$	5	8	-1		
$24\beta_{3j}$	9	19	-5	1	
$720\beta_{4j}$	251	646	-264	106	-19

对于隐式公式 (8.4.3)，需要用迭代求解。确定 y_{n+1} 的迭代公式为

$$y_{n+1}^{(s+1)} = y_n + h \left[\beta_{r0} f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(s)}) + \sum_{j=1}^r \beta_{rj} f_{n-j+1} \right], \quad s = 0, 1, \dots,$$



迭代收敛条件为 $h|\beta_{r,0}|L < 1$ ，其中 L 为 f 关于 y 的 **Lipschitz** 常数

利用插值多项式的余项，可以求出 **Adams** 方法的局部截断误差。当然也可以从得到的显式和隐式 **Adama** 公式，有局部截断误差的定义来求出方法的局部截断误差。表 8-8 中列出了它们的局部截断误差的主项，有表 8-8 可以看出，**Adams** 隐式方法的局部截断误差要小。

表 8-8

r	0	1	2	3
Adams 显式公式	$\frac{1}{2}h^2 y''(x_n)$	$\frac{5}{12}h^3 y'''(x_n)$	$\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_n)$	$\frac{251}{720}h^5 y^{(5)}(x_n)$
Adams 隐式公式	$-\frac{1}{2}h^2 y''(x_n)$	$-\frac{1}{12}h^3 y'''(x_n)$	$-\frac{1}{24}h^4 y^{(4)}(x_n)$	$-\frac{19}{720}h^5 y^{(5)}(x_n)$



8.4.2 基于Taylor展开的方法

基于数值积分可以构造出一系列求解常微分方程的计算公式，下面介绍基于 **Taylor** 展开的待定系数法，它可灵活地构造出线性多步法。对固定的系数，可以选取待定系数使线性多步法的阶尽可能高。还可以根据需要，确定显式还是隐式。

设构造如下具有 **p** 阶精度的线性多步公式

$$y_{n+1} = \alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n-1} + \cdots + \alpha_r y_{n-r} + h(\beta_{-1} f_{n+1} + \beta_0 f_n + \cdots + \beta_r f_{n-r}). \quad (8.4.4)$$

当 $\beta_{-1} = 0$ 时，则 (8.4.4) 为显式多步式。当 $\beta_{-1} \neq 0$ 时，(8.4.4) 为隐式多步式。它们的局部截断误差为



$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - \left[\sum_{k=0}^r \alpha_k y(x_{n-k}) + h \sum_{k=-1}^r \beta_k f(x_{n-k}, y(x_{n-k})) \right],$$

利用原微分方程，有

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - \left[\sum_{k=0}^r \alpha_k y(x_{n-k}) + h \sum_{k=-1}^r \beta_k y'(x_{n-k}) \right]. \quad (8.4.5)$$

现利用**Taylor**展开定理，确定线性多步公式 (8.4.4) 中的待定参数 α_k, β_k ，使她达到 P 阶精度，即 $T_{n+1} = O(h^{p+1})$ 。

对 (8.4.5) 式的右端各项在 x_n 点处作**Taylor**展开有



$$y(x_{n-k}) = \sum_{j=0}^p \frac{(-kh)^j}{j!} y^{(j)}(x_n) + \frac{(-kh)^{p+1}}{(p+1)!} y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+2}),$$

$$y'(x_{n-k}) = \sum_{j=1}^p \frac{(-kh)^j}{(j-1)!} y^{(j)}(x_n) + \frac{(-kh)^{p+1}}{p!} y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+1}).$$

将它们代入 (8.4.5) 式整理后得

$$\begin{aligned} T_{n+1} = & \left(1 - \sum_{k=0}^r \alpha_k\right) y(x_n) + \sum_{j=1}^p \frac{h^j}{j!} \left[1 - \sum_{k=1}^r (-k)^j \alpha_k\right. \\ & - j \sum_{k=1}^r (-k)^{j-1} \beta_k \left. \right] y^{(j)}(x_n) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \left[1 - \sum_{k=1}^r (-k)^{p+1} \alpha_k\right. \\ & \left. - (p+1) \sum_{k=1}^r (-k)^p \beta_k \right] y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+2}) \end{aligned}$$



使 $y(x_n)$, h , h^2, \dots, h^p 的系数为零, 得到关于 α_k 和 β_k 的线性方程组

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^r \alpha_k = 1, \\ \sum_{k=1}^r (-k)^j \alpha_k + j \sum_{k=-1}^r (-k)^{j-1} \beta_k = 1, \quad j = 1, 2, \dots, p. \end{cases} \quad (8.4.6)$$

而且得到线性多步法的局部截断误差

$$\begin{aligned} T_{n+1} = & \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \left[1 - \sum_{k=1}^r (-k)^{p+1} \alpha_k \right. \\ & \left. - (p+1) \sum_{k=-1}^r (-k)^p \beta_k \right] y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+2}). \end{aligned}$$



下面我们构造几个著名的四阶线性多步公式，考虑下列形式的公式

$$y_{n+1} = \alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n-1} + \alpha_2 y_{n-2} + \alpha_3 y_{n-3} + h(\beta_{-1} f_{n+1} + \beta_0 f_n + \beta_1 f_{n-1} + \beta_2 f_{n-2} + \beta_3 f_{n-3}), \quad (8.4.7)$$

$$T_{n+1} = \frac{h^5}{5!} [1 - \sum_{k=1}^3 (-1)^5 \alpha_k - 5 \sum_{k=-1}^3 (-k) \beta_k] y^{(5)}(x_n) + O(h^6). \quad (8.4.8)$$

由于 $r=3$ ， $p=4$ ，由 (8.4.6) 得到 5 个方程，而 (8.4.7) 中有 9 个为知量，因此，(8.4.7) 中有 4 个自由度。

若取 $\beta_{-1} = 0$ ， $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ，由 (8.4.6) 式得到其他 5 个待定参数的方程组，解之得

$$\alpha_0 = 1, \quad \beta_0 = \frac{55}{24}, \quad \beta_1 = -\frac{59}{24}, \quad \beta_2 = \frac{37}{24}, \quad \beta_3 = -\frac{9}{24}.$$



代入 (8.4.7) 和 (8.4.8) 式, 得到常用的**四步四阶显式Admas公式**和它的余项:

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{h}{24} (55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}) \quad (8.4.7)$$

$$T_{n+1} = \frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(x_n) + O(h^6) \quad (8.4.8)$$

若取 $\beta_{-1} = 0$, $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$, 由 (8.4.6) 式得到其他5个待定参数的方程组, 解之得

$$\alpha_3 = 1, \quad \beta_0 = \frac{8}{3}, \quad \beta_1 = -\frac{4}{3}, \quad \beta_2 = \frac{8}{3}, \quad \beta_3 = 0.$$

由此构造成著名的**四步四阶显式Milne公式**和它的余项



$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4}{3}h(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}), \quad (8.4.11)$$

$$T_{n+1} = \frac{14}{45}h^5 y^{(5)}(x_n) + O(h^6), \quad (8.4.12)$$

若取 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\beta_3 = 0$ 由 (8.4.6) 式得到其他5个待定参数的方程组, 从而得**三步四阶隐式Admas公式**及余项:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}), \quad (8.4.13)$$

$$T_{n+1} = -\frac{19}{720}h^5 y^{(5)}(x_n) + O(h^6), \quad (8.4.14)$$

若取 $\alpha_0 = \alpha_3 = 0$, $\beta_2 = \beta_3 = 0$, 求解 (8.4.6) 得著名的**三步四阶隐式Hamming公式**及其余项:



$$y_{n+1} = \frac{1}{8}(9y_n - y_{n-2}) + \frac{3}{8}h(f_{n+1} + 2f_n - f_{n-1}), \quad (8.4.15)$$

$$T_{n+1} = -\frac{1}{40}h^5 y^{(5)}(x_n) + O(h^6). \quad (8.4.16)$$

若取 $\alpha_0 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\beta_3 = 0$, 求解 (8.4.6) 得到隐式Simpson公式及其
余项:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}),$$

$$T_{n+1} = -\frac{1}{90}h^5 y^{(5)}(x_n) + O(h^6).$$



例8.5 分别取 $h=0.2$, 2 , 用四阶显式 **Milne**公式和四阶隐式 **Hamming**公式求解例8.4所给的初值问题。

解 我们用单步法提供多步法的初值。由4阶经典R-K公式为**Milne**公式提供初值 y_0, y_1, y_2, y_3 , 为 **Hamming**公式提供 y_0, y_1, y_2 。 $h=0.2$ 和 $h=2$ 时的计算结果及准确解之间的误差分别列于表8-9和表8-10。

从表8-9看出, 两种多步法的计算精度都很高, **Hamming**公式化比 **Milne**公式更精确。这是因为 **Hamming**公式的截断误差主项的系数比 **Milne**公式小。从表8-10看到, 当计算步长变大后, 显式多步法 **Milne**公式的计算结果误差增大, 不稳定, 而隐式多步法 **Hamming**公式的计算结果仍然是稳定的, 这说明隐式公式的稳定性比同阶的显式公式好。



表8-9

x_n	Milne方法	误差	Hammins方法	误差
2.2	0.94294268	-1.8×10^{-5}	0.94291955	4.2×10^{-6}
2.4	1.12283349	5.0×10^{-6}	1.12283386	4.6×10^{-6}
2.6	1.30643214	-3.8×10^{-5}	1.30638930	4.8×10^{-6}
2.8	1.49291625	1.4×10^{-5}	1.49292582	4.8×10^{-6}
3.0	1.68195450	-4.7×10^{-5}	1.68190299	4.6×10^{-6}



表 8-10

x_n	Milne方法	误差	Hammins方法	误差
7	5.645745	-1.3×10^{-2}	5.645745	-1.3×10^{-2}
9	7.382325	2.5×10^{-1}	7.637126	-4.9×10^{-3}
11	10.905316	-1.3	9.635636	-3.5×10^{-3}
13	4.143831	7.5	11.632261	-1.4×10^{-4}
15	58.310717	-4.5×10^1	13.632240	-1.1×10^{-3}
17	-249.662672	2.7×10^2	15.631690	4.3×10^{-4}

经典R-K法和上述四阶线性多步法公式都是四阶精度，但每前进一步，前者要计算4次微分方程右端方程，而后者只要计算一次新的右端函数值，计算量减小了。



8.4.3 预估-校正算法

显式多步法容易计算，但其精度和稳定性没有相应的隐式方法好。然而，隐式多步法需解方程，如果初值选得不当，则计算量较大。因此，设法选取好的迭代初值是必要的。初值的自然选取是采用同阶显式多步法计算得到的解作为隐式方法迭代的初值。这样，迭代次数不会多。若只迭代一次，则这样的算法就是**预估-校正算法**。对于线性多步法，常用的预估——校正方法有四阶 **Admas** 显隐式预估-校公式和 **Milne-Hamming** 方法。

1.Adams 预估-校正公式

由 (8.4.9) 式作为预估公式，由 (8.4.13) 式作为校正公式，构成 **Adams 预估-校正公式**：



$$y^p_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f(x_{n+1}, y^p_{n+1}) + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}).$$

若需作进一步的修正，则记上式所得的 $y_{n+1} = y^c_{n+1}$ ，由 (8.4.10) 和 (8.4.14) 式有

$$T^p_{n+1} = y(x_{n+1}) - y^p_{n+1} \approx \frac{251}{720}h^5 y^{(5)}(x_n),$$

$$T^c_{n+1} = y(x_{n+1}) - y^c_{n+1} \approx -\frac{19}{720}h^5 y^{(5)}(x_n).$$

于是得到



$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^p \approx -\frac{251}{270} (y_{n+1}^p - y_{n+1}^c)$$

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^c \approx \frac{19}{270} (y_{n+1}^p - y_{n+1}^c)$$

由此可见，若记

$$\bar{y}_{n+1}^p = y_{n+1}^p + \frac{251}{270} (y_{n+1}^c - y_{n+1}^p)$$

$$\bar{y}_{n+1}^c = y_{n+1}^c - \frac{19}{270} (y_{n+1}^c - y_{n+1}^p)$$

则 \bar{y}_{n+1}^p , \bar{y}_{n+1}^c 分别比 y_{n+1}^p , y_{n+1}^c 更好。但注意到, \bar{y}_{n+1}^p 的表达式中, \bar{y}_{n+1}^c 是未知的, 因此改为



$$\bar{y}_{n+1}^p = y_{n+1}^p + \frac{251}{270} (y_n^c - y_n^p).$$

这样，得到下面的修正的Adams预估-校正公式：

$$\text{预估： } y_{n+1}^p = y_n + \frac{h}{24} (55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}),$$

$$\text{修正： } \bar{y}_{n+1}^p = y_{n+1}^p + \frac{251}{270} (y_{n+1}^c - y_{n+1}^p)$$

$$\text{校正： } y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (9 f(x_{n+1}, y_{n+1}^p) + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}),$$

$$\text{修正： } \bar{y}_{n+1}^c = y_{n+1}^c - \frac{19}{270} (y_{n+1}^c - y_{n+1}^p)$$

在计算时，可调节计算步长 h ，使 $\left| -\frac{19}{270} (y_{n+1}^c - y_{n+1}^p) \right| < \varepsilon$ ，其中 ε 是要求达到的计算精度。初值 y_0, y_1, y_2, y_3 由同阶单步法提供，当计算 y_4 时，可取 $y_3^c = y_3^p$ 。



2. 修正Hamming公式

将 **Milne** 公式 (8.4.11) 和 **Hamming** 公式 (8.4.15) 结合, 构成 **Milne-Hamming** 预估-校正公式:

$$y_{n+1}^p = y_{n-3} + \frac{4}{3}h(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}),$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{8}(9y_n - y_{n-2}) + \frac{3}{8}h(f(x_{n+1}, y_{n+1}^p) + 2f_n - f_{n-1}).$$

若需作进一步的修正, 则记上式所得的 $y_{n+1} = y_{n+1}^c$, 由 (8.4.12) 和 (8.4.16) 有

$$T_{n+1}^p = y(x_{n+1}) - y_{n+1}^p \approx \frac{14}{45}h^5 y^{(5)}(x_n),$$

$$T_{n+1}^c = y(x_{n+1}) - y_{n+1}^c \approx -\frac{1}{40}h^5 y^{(5)}(x_n).$$



于是得到

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^p \approx \frac{112}{121} (y_{n+1}^c - y_{n+1}^p)$$

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^c \approx -\frac{9}{121} (y_{n+1}^c - y_{n+1}^p)$$

由此分别得 **Milne** 和 **Hamming** 公式的修正公式:

$$\bar{y}_{n+1}^p = y_{n+1}^p + \frac{112}{121} (y_{n+1}^c - y_{n+1}^p)$$

$$\bar{y}_{n+1}^c = y_{n+1}^c - \frac{9}{121} (y_{n+1}^c - y_{n+1}^p)$$

从而构成如下的修正 **Hamming** 公式:



预估: $y^p_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4}{3}h(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2})$

修正: $\bar{y}_{n+1}^p = y_{n+1}^p + \frac{112}{121}(y_n^c - y_n^p)$

校正: $y_{n+1}^c = \frac{1}{8}(9y_n - y_{n-2}) + \frac{3}{8}h(f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}^p) + 2f_n - f_{n-1})$

修正: $y_{n+1} = y_{n+1}^c - \frac{9}{121}(y_{n+1}^c - y_{n+1}^p)$

在计算时, 可调节计算步长 h , 使 $\left| -\frac{19}{270}(y_{n+1}^c - y_{n+1}^p) \right| < \varepsilon$ 。初值

y_0, y_1, y_2 由同阶单步法提供, 当计算 y_3 时, 可取 $y_2^c = y_2^p$ 。



例8.6 取 $h=0.2$ ，用 **Milne-Hamming** 预估-校正公式和修正 **Hamming** 公式求解例8.4所给的初值问题。

解 用经典 **R-K** 法提供初值，计算结果列于表 8-11。将表 8-9 与表 8-11 所示的计算结果进行比较，它们的计算精度排列次序是：修正 **Hamming** 公式的精度最好，其次是隐式 **Hamming** 公式，再次是 **Milne-Hamming** 预估-校正公式，最后是 **Milne** 公式。

表8-11

x_n	Milne-Hamming	误差	修正 Hamming	误差
2.2	0.94291625	7.5×10^{-6}	0.94292449	-7.8×10^{-7}
2.4	1.12282872	9.8×10^{-6}	1.12283955	-1.0×10^{-6}
2.6	1.30638271	1.1×10^{-5}	1.30639537	-1.2×10^{-6}
2.8	1.49291816	1.2×10^{-5}	1.49293184	-1.2×10^{-6}
3.0	1.68189467	1.3×10^{-5}	1.68190879	-1.2×10^{-6}

