# 8.3 单步法的收敛性和稳定性

8.3.1 单步法的收敛性
8.3.2 单步法的稳定性

## 8.3.1 单步法的收敛性

数值解法的基本思想就是要通过某种离散化方法，将微分方程转化为某种差分方程（例如，（8.1.8）式）来求解。这种转化是否合理，还要看差分方程的解 $y_n$ ，是否收敛到微分方程的准确解 $y(x_n)$ 。

定义8.3 对于任意固定的 $x_n = x_0 + nh$，若对于初值问题（8.1.1）的显式单步法（8.1.8）产生的近似解 $y_n$ ，均有 $y_n \to y(x_n)(h \to 0,$ 同时$n \to \infty)$，则称该方法是收敛的。

在定义中，$x_n$ 是固定的点，当 $h \to 0$ 时有 $n \to \infty$ ，n不是固定的。显然，若方法是收敛的，则在固定点 $x_n$ 处的整体截断误差 $e_n = y(x_n) - y_n$ 趋于零。下面给出方法收敛的条件。

定理8.1 设初值问题（8.1.11）的单步法（8.1.8）是p阶的（$p \geq 1$），且函数满足对y的Lipschitz条件即存在常数 $L > 0$ ，使

$$\left|\varphi(x, y_1, h)-\varphi(x, y_2, h)\right| \le L\left|y_1-y_2\right|,$$

对一切 $y_1, y_2 \in R$ 成立，则方法（8.1.8）收敛，且 $y(x_n)-y_n=O(h^p)$ 。

证 仍记 $e_n=y(x_n)-y_n$，根据局部截断误差的定义

$$y(x_{n+1})=y(x_n+h\varphi(x_x, y(x_n), h)+T_{n+1})$$

将此式与（8.1.8）相减得

$$e_{n+1}=e_n+h[\varphi(x_n, y(x_n), h)-\varphi(x_n, y_n, h)]+T_{n+1}。$$

因为（8.1.8）是p阶的，所以存在 $h_0$ ，当 $0<h\le h_0$ 时有 $\left|T_{n+1}\right|\le ch^{p+1}$ 。

再用 $\varphi$ 的Lipschitz条件有

$$\left|e_{n+1}\right|\le\left|e_n\right|+hL\left|e_n\right|+ch^{p+1}。$$

为了方便，记 $\alpha=1+hL$， $\beta=ch^{p+1}$，即有 $\left|e_{n+1}\right|\le\alpha\left|e_n\right|+\beta$ 。由此可推得

$$\left|e_n\right|\le\alpha\left|e_{n-1}\right|+\beta\le\alpha^2\left|e_{n-2}\right|+\alpha\beta+\beta\cdots$$
$$\le\alpha^n\left|e_0\right|+\beta(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}+\cdots+\alpha+1)。$$

利用关系式

$$e^{Lh}=1+Lh+\frac{(Lh)^2}{2}+\cdots\geq 1+Lh,$$

$$\alpha^n=(1+Lh)^n\leq e^{nLh}=e^{L(x_n-x_0)},$$

可以得到

$$|e_n|\leq|e_0|e^{L(x_n-x_0)}+\left[e^{L(x_n-x_0)}-1\right]ch^pL^{-1}。$$

现在取$y_0=y(x_0)$，有 $e_0=0$ ，于是有$e_n=o(h^p)$ 。定理得证。

容易证明，如果（8.1.1）的 $f$ 满足**Lipschitz**条件是,且初值是正确的，则显示**Euler**法、改进的**Euler**法和**R-K**方法是收敛的。由定理**8.1**说明,**f**关于**y**满足**Lipschitz**条件是使单步收敛的充分条件，而且，还说明一个方法的整体截断误差比局部截断误差低一阶。所以，常常通过

求出局部截断误差去了解整体截断误差的大小。

单步法的显式形式（**8.1.8**）可写成

$$\varphi(x_n,\ y_n,\ h)=\frac{y_{n+1}-y_n}{h}。\qquad（8.3.1）$$

称$\varphi(x_n, y_n, h)$为增量函数。对于收敛的方法，固定 $x = x_n$ ，有$y_n \to y(x_n)(h \to 0)$,
从而$(y_{n+1} - y_n)/h \to y'(x_n)(h \to 0)$。对于（8.3.1），我们自然要考虑$\varphi(x_n, y_n, h) \to$
$f(x_n, y(x_n))(h \to 0)$是否成立。这就是相容性问题。

定义8.4 若方法（8.1.8）的增量函数 $\varphi$ 满足

$$\varphi(x, y, 0) = f(x, y),$$

则称方法（8.1.8）与初值问题（8.1.1）是相容的。

相容性说明数值计算的差分方程（8.3.1）趋于（8.1.1）中微分方程。我们本章讨论的数值方法都是与原初值问题相容的。

## 8.3.2 单步法的稳定性

对于一种收敛的相容的差分方程，由于计算过程中舍入误差总会存在，我们需要讨论其数值稳定性。一个不稳定的差分方程会使计算解失真或计算失败。

为了讨论方便起见。将（**8.1.1**）中的$f(x, y)$在解域内某一点$(a, b)$ 作**Taylor**展开并局部线性化，即

$$y' = f(x, y) \approx f(a, b) + (x-a) f_x(a, b) + (y-b) f_y(a, b)$$
$$= f_y(a, b) y + c_1 x + c_2。$$

令$\lambda = f_y(a, b)$

$$u = y + \frac{c_1}{\lambda} x + \frac{c_1}{\lambda^2} + \frac{c_2}{\lambda},$$

利用线性化的关系，可得 $u' \approx \lambda u$ 。因此，我们通过如下的试验方程

$$y' = \lambda y \qquad (8.3.2)$$

讨论数值方法的稳定性。当某一步 $y_n$ 有舍入误差时，若以后的计算中不会逐步扩大，则称这种稳定性为绝对稳定性。

现在讨论显式Euler法的稳定性。将显式Euler法用于试验方程（8.3.2），有 $y_{n+1} = (1+\lambda h)y_n$。当 $y_n$ 有舍入误差时，其近似值为 $\tilde{y}_n$，从而有 $\tilde{y}_{n+1} = (1+\lambda h)\tilde{y}_n$。令 $\varepsilon_n = y_n - \tilde{y}_n$，得到误差传播方程。

$$\varepsilon_{n+1} = (1+\lambda h)\varepsilon_n。$$

令 $E(\lambda h) = 1+\lambda h$，只要 $|E(\lambda h)| \le 1$，则显式Euler方法的解和误差都不会恶性发展，即 $-2 \le \lambda h \le 0$ 时，显式Euler方法是稳定的，即是条件稳定的。

对于梯形方法，应用于试验方程后，有

$$y_{n+1}=\frac{1+\lambda h/2}{1-\lambda h/2}$$

同理，有误差方程 $\varepsilon_{n+1}=E(\lambda h)\varepsilon_n$，其中 $E(\lambda h)=(1+\lambda h/2)/(1-\lambda h/2)$。因此当 $\lambda\le 0$ 时，梯形方法是稳定的。

一般地，在试验方程（8.3.2）中，我们只考虑 $\lambda<0$ 的情形，而对 $\lambda=f_y>0$ 的情形，我们认为微分方程是不稳定的。比如，将显式**Euler**方法用于（8.1.1）中的方程，有

$$\varepsilon_{n+1}=\varepsilon_n+h\left[f(x_n,\ y_n)-f(x_n,\ \tilde{y}_n)\right]=\left[1+hf_y(x_n,\ \eta)\right]\varepsilon_n。$$

当 $f_y(x_n,\ n)>0$ 时，有 $1+hf_y(x_n,\ \lambda\eta)>1$。

对于每一种单步法应用于试验方程（8.3.2），可得

$$y_{n+1}=E(\lambda h)y_n, \qquad (8.3.3)$$

然而，对于不同的单步法，$E(\lambda h)$ 有不同的表达式。

定义8.5 若（8.3.3）式中的$\left|E(\lambda h)\right| \le 1$，则称对应的单步法是绝对稳定的。在复平面上,$\lambda h$ 满足$\left|E(\lambda h)\right| \le 1$ 的区域，称为方法的绝对稳定区域，它与实轴的交称为绝对稳定区间。

一些单步法的$E(\lambda h)$表达式和它们的绝对稳定区间列于表8-4。从表中可见，隐式方法比显式方法的绝对稳定性好。

表 8-4

| 方法 | $E(\lambda h)$ | 绝对稳定区间 |
|---|---|---|
| Euler法 | $1+\lambda h$ | $-2 \le \lambda h \le 0$ |
| 改进的Euler法 | $1+\lambda h+\frac{(\lambda h)^2}{2}$ | $-2 \le \lambda h \le 0$ |
| 三阶R-K法 | $1+\lambda h+\frac{(\lambda h)^2}{2}+\frac{(\lambda h)^3}{6}$ | $-2.51 \le \lambda h \le 0$ |
| 四阶R-K法 | $1+\lambda h+\frac{(\lambda h)^2}{2}+\frac{(\lambda h)^3}{6}+\frac{(\lambda h)^4}{24}$ | $-2.785 \le \lambda h \le 0$ |
| 隐式Euler法 | $\frac{1}{1-\lambda h}$ | $-\infty < \lambda h \le 0$ |
| 梯形式 | $\frac{1+\lambda h/2}{1-\lambda h/2}$ | $-\infty < \lambda \le 0$ |

例 8.4　分别取h=1，2，4，用经典R-K方法计算

$$\begin{cases} y' = -y + x - e^{-1}, \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

其准确解为 $y(x) = e^{-x} + x - 1 - e^{-1}$ 。

解　本题 $\lambda = -1$，$\lambda h$ 分别为-1，-2，-4。有表8-4可知，当 $h \le 2.785$ 时，该方法才稳定，计算结果列于表8-5

表 8-5

| $x_n$ | h=1的解 | h=2的解 | h=4的解 | 准确解 |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 3.6394 | 3.6730 | 5.4715 | 3.6389 |
| 9 | 7.6323 | 7.6367 | 16.8291 | 7.6322 |
| 13 | 11.6321 | 11.6326 | 57.6171 | 11.6321 |

由表8-5可见，**h=1**和**h=2**时，计算结果确实稳定，，**h=4**时，结果发散。此外，**h**为**1**的计算精度比**h**为**2**的计算精度高。因为**h** 越小，方法的截断误差越小。但若**h**过分小的话，计算步数非常多，其累积误差会增加。所以，实际计算时，应选取合适的步长，常常采用自动变步长的**R-K**方法。