第8章 常微分方法的数值解法 ----8.1 Euler 方法

8.1.1 Euler 方法及其有关的方法

8.1.2 局部误差和方法的阶

第8章 常微分方法的数值解法

教学目的

1. 掌握解常微分方程的单步法：Euler方法、Taylor方法和Runge-Kutta方法；
2. 掌握解常微分方程的多步法：Adams步法、Simpson方法和Milne方法等；
3. 了解单步法的收敛性、相容性与稳定性；多步法的稳定性。

教学重点及难点

重点是解常微分方程的单步法：Euler方法、Taylor方法和Runge-Kutta方法和解常微分方程的多步法：Adams步法、Simpson方法和Milne方法等；

难点是理解单步法的收敛性、相容性与稳定性及多步法的稳定性。

第8章 常微分方法的数值解法

科学技术与工程问题常常需要建立微分方程形式的数学模型，下面是这类问题的例子。

设N（t）为某物种的数量，α 为该物种的的出生率与死亡率之差，β 为生物的食物供给及它们所占空间的限制，描述该物种增长率的数学模型是

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = \alpha N(t) - \beta N^2(t) \\ N(t_0) = N_0。 \end{cases}$$

设Q是电容器上的带电量，C为电容，R为电阻，E为电源的电动势，描述该电容器充电过程的数学模型是

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = E - \dfrac{Q(t)}{RC}, \\ Q(t_0) = Q_0。 \end{cases}$$

以上两个例子是常微分方程初值问题，下面是一个两点边值问题的例子。

设一跟长为L的矩形截面的梁，两端固定。E是弹性模量，S是端点作用力，I（x）是惯性矩，q是均匀荷载强度，梁的桡度y（x）满足如下方程

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{S}{EI(x)}y(x) + \dfrac{qx}{2EI(x)}(x-l), \\ y（0）= y(L) = 0。\end{cases}$$

针对实际问题建立的数学模型，要找出模型解的解析表达式往往是困难的，甚至是不可能的。因此，需要研究和掌握微分方程的数值解法，即计算解域内离散点上的近似值的方法。本章讨论常微分方程数值解的基本方法和理论。

8.1 Euler 方法

8.1.1 Euler 方法及其有关的方法

考虑一阶常微分方程初值的问题：

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

设f（x,y）是连续函数，对y满足Lipschitz条件，这样初值问题的解是存在唯一的，而且连续依赖于初始条件。

为了求得离散点上的函数值，将微分方程的连续问题（8.1.1）进行离散化。一般是引入点列{ X_n }，这里 $x_n = x_{n-1} + h_n, n = 1,2,\ldots$。称 h_n 为步长，经常考虑定长的情形，即 $h_n = h$， $x_n = x_0 + nh$， $n = 0,1,\cdots$。记 $y(x_n)$ 为初始问题（8.1.1）的问题准确解 $y(x)$ 在 x_n 处的值，用均差近似代替（8.1.1）的导数得

$$\frac{y(x_n+h)-y(x_n)}{h}\approx f(x_n,\ y(x_n)),$$

$$\frac{y(x_n+h)-y(x_n)}{h}\approx f(x_{n+1},\ y(x_{n+1}))。$$

令 y_n 为 $y(x_n)$ 的近似值，将上面两个近似写成等式，整理后得

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,\ y_n),\quad n=0,1,\cdots \qquad (8.1.2)$$

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},\ y_{n+1}),\quad n=0,1,\cdots。 \qquad (8.1.3)$$

从 x_0 处的初值 y_0 开始，按（**8.1.2**）可逐步计算以后各点上的值。称（**8.1.2**）式为**显式Euler**。由于（**8.1.3**）式的右端隐含有待求函数值 y_{n+1} ，不能逐步显式计算，称（**8.1.3** ）式为**隐式Euler公式**或**后退Euler公式**。如果将（**8.1.2**）和（**8.1.3**）两式作算术平均，就得**梯形公式**。

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, \ y_n) + f(x_{n+1}, \ y_{n+1})\right], \quad n = o, 1, \cdots。 \qquad (8.1.4)$$

梯形公式也是隐式公式。以上公式都是由 y_n 去计算 y_{n+1}，故称它们为单步法。

例**8.1** 取**h=0.1**，用**Euler**方法、隐式**Euler**方法和梯形方法解

$$\begin{cases} y' = x - y + 1, \\ y(0) = 1。\end{cases}$$

解 本题有 $f(x, \ y) = x - y + 1, \ y_0 = 1$。如果用**Euler**方法，由（**8.1.2**）并代入**h=0.1**得

$$y_{n+1} = 0.1x_n + 0.9y_n + 0.1。$$

同理，用隐式**Euler**方法有

$$y_{n+1} = \frac{1}{1.1}(0.1x_{n+1} + y_n + 0.1)。$$

用梯形公式有

$$y_{n+1} = \frac{1}{1.05}(0.1x_n + 0.95y_n + 0.105)。$$

三种方法及准确解 $y(x) = x + e^{-x}$ 的数值结果如表**8-1**所示。从表中看到，在 $x_n = 0.5$ 处，**Euler**方法和隐式**Euler**方法的误差 $|y(x_n) - y_n|$ 分别是 1.4×10^{-2} 和 1.6×10^{-2}，而梯形方法的误差却是 2.5×10^{-4} 。

在例**8.1**中，由于**f（x，y）**对**y**是线性的，所以对隐式公式也可以方便地计算 y_{n+1}。但是，当**f（x，y）**是**y**的非线性函数时，如 $y' = 5x + \sqrt[3]{y}$ ，其隐式**Euler**公式为 $y_{n+1} = y_n + h(5x_{n+1} + \sqrt[3]{y_{n+1}})$。显然，它是 y_{n+1} 的非线性方程，可以选择非线性方程求根的迭代求解 y_{n+1} 。以梯形公式为例，可用显式**Euler**公式提供迭代初值 $y_{n+1}^{(0)}$，用公式

表8-1

x_n	Euler方法	隐式Euler方法	梯形法	准确解
0	1	1	1	1
0.1	1.000000	1.009091	1.004762	1.004837
0.2	1.010000	1.026446	1.018549	1.018731
0.3	1.029000	1.051315	1.040633	1.040818
0.4	1.056100	1.083013	1.070096	1.070320
0.5	1.090490	1.120921	1.106278	1.106531

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, \ y_n) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, \ y_n) + f\left(x_{n+1}, \ y_{n+1}^{(k)}\right)\right], \quad k = 0,1,\cdots, \end{cases}$$

反复迭式，直到

$$\left|y_{n+1}^{(k+1)} - y_{n+1}^{(k)}\right| < \varepsilon,$$

其中，步长**h**成为迭代参数，它需要满足一定的条件，才能收敛。若将（**8.1.4**）式减去该迭代公式，得

$$y_{n+1} - y_{n+1}^{(k+1)} = \frac{h}{2}\left[f\left(x_{n+1}, \ y_{n+1}\right) - f\left(x_{n+1}, \ y_{n+1}^{(k)}\right)\right]$$

假设**f**（**x**，**y**）关于**y**满足**Lipschiz**条件，则有

$$\left|y_{n+1}-y_{n+1}^{(k+1)}\right| \le \frac{hL}{2}\left|y_{n+1}-y_{n+1}^{(k)}\right|,$$

这里，**L**是**Lipschiz**常数。当**hL/2<1**即**h<2/L**时，迭代序列 $\left\{y_{n+1}^{(k)}\right\}$ 收敛 y_{n+1} 。

对于隐式公式，通常采用估计-校正技术，即先用显式公式计算，得到预估值，然后以预估值作为隐式公式的迭代初值，用隐式公式迭代一次得到校正值，称为预估-校正技术。例如，用显式**Euler**公式作预估，用梯形公式作校正，即

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n,\ y_n), \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[f(x_n,\ y_n) + f(x_{n+1},\ \bar{y}_{n+1})\right], \quad n = 0,1,\cdots。 \end{cases}$$

称该公式为改进的**Euler**公式。它显然等价于显式公式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))\right] \quad , \qquad (8.1.6)$$

也可以表示为下列平均化的形式

$$\begin{cases} y_p = y_n + hf(x_n, y_n), \\ y_q = y_n + hf(x_{n+1}, y_p), \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_q)。 \end{cases}$$

例8.2 取h=0.1，用改进的Euler方法解

$$\begin{cases} y' = y - \frac{2x}{y}, \\ y(0) = 1。 \end{cases}$$

解 按（8.1.5），改进的Euler方法解

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + h(y_n - \frac{2x_n}{y_n}), \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[(y_n - \frac{2x_n}{y_n}) + (\bar{y}_{n+1} - \frac{2x_{n+1}}{\bar{y}_{n+1}})\right], \quad n = 0,1,\cdots。 \end{cases}$$

由 $y_0=1$，$h=0.1$ 得计算结果如表**8-2**。该初值问题的准确解为 $y(x)=\sqrt{1+2x}$ 。

表 **8-2**

x_n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
y_n	1.0959	1.1841	1.2662	1.3434	1.4164	1.4860	1.5525	1.6153
$y(x_n)$	1.0954	1.1832	1.2649	1.3416	1.4142	1.4832	1.5492	1.6165

8.1.2 局部误差和方法的阶

初值问题（**8.1.1**）的单步法可以写成如下统一形式

$$y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,\ x_{n+1},\ y_n,\ y_{n+1},\ h),\tag{8.1.7}$$

其中φ与f有关。若φ中不含y_{n+1}，则方法是显式的，否则是隐式的，所以一般显式单步法表示为 $y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,\ y_n,\ h)$。　　（**8.1.8**）

例如，**Euler**方法中，有　$\varphi(x,\ y,\ h)=f(x,\ y)$

对于不同的方法，计算值y_n与准确解$y(x_n)$的误差各不相同。所以有必要讨论方法的截断误差。我们称$e_n=y(x_n)-y_n$为某一方法在x_n点的整体截断误差。显然，e_n不单与x_n这步的计算有关，它与以前各步的计算也有关，所以误差被称为整体的。分析和估计整体截断误差e_n是复杂的。为此，我们假设x_n处的y_n没有误差，即 $y_n=y(x_n)$，考虑从x_n到x_{n+1}这一步的误差，这就是如下的局部误差的概念。

定义8.1 设 $y(x)$ 是初值问题（**8.1.1**）的准确解，则称

$$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_n)-h\varphi(x_n,\ x_{n+1},\ y(x_n),\ y(x_{n+1}),\ h)$$

为单步法（**8.1.7**）的局部截断误差。

定义8.2 如果给定方法的局部截断误差 $T_{n+1}=O(h^{p+1})$ ，其中 $p\geq 1$ 为整数，则称该方法是**p**阶的，或具有**p**阶精度。若一个**p**阶单步法的局部截断误差为

$$T_{n+1}=g(x_n,\ y(x_n))h^{p+1}+o(h^{p+2}),$$

则称其第一个非零项 $g(x_n y(x_n))h^{p+1}$ 为该方法的局部截断误差的主项。

对于**Euler**方法，有**Taylor**展开有

$$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_n)-hf(x_n,\ y(x_n))$$

$$=y(x_{n+1})-y(x_n)-hy'(x_n)$$

$$=\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{6}y'''(x_n)+o(h^4)=o(h^2)$$

所以**Euler**方法是一种一阶方法，其局部截断误差的主项为 $\frac{h^2}{2}y''(x_n)$ 。

对于隐式**Euler**方法，其局部截断误差为

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_{n+1}, \ y(x_{n+1})) \\ &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - hy'(x_{n+1}) \\ &= -\frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3) = O(h^2) \end{aligned}$$

所以隐式**Euler**方法也是一种一阶方法，该方法的局部截断误差的主项为 $-\frac{h^2}{2}y''(x_n)$，仅与显式**Euler**方法的局部截断误差的主项反一个符号。

梯形方法也是一种隐式单步法，类似可得其局部截断误差

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - \frac{h}{2}[f(x_n, \ y(x_n)) + f(x_{n+1}, \ y(x_{n+1}))] \\ &= -\frac{h^3}{12}y'''(x_n) + O(h^4) = O(h^3)。\end{aligned}$$

可见，梯形方法是二阶精度的。