# 6.3 一元方程的常用迭代法

6.3.1 Newton迭代法

6.3.2 割线法与抛物线法

## 6.3.1 Newton迭代法

设x*是方程f(x)=0的实根，$x_k$ 是 $x_k \approx x^*$ 一个近似根，用Taylor展开式有

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f''(\xi)}{2}(x^* - x_k)^2,$$

这里假设 $f''(x)$ 存在并连续。若 $f'(x_k) \neq 0$ ，可得

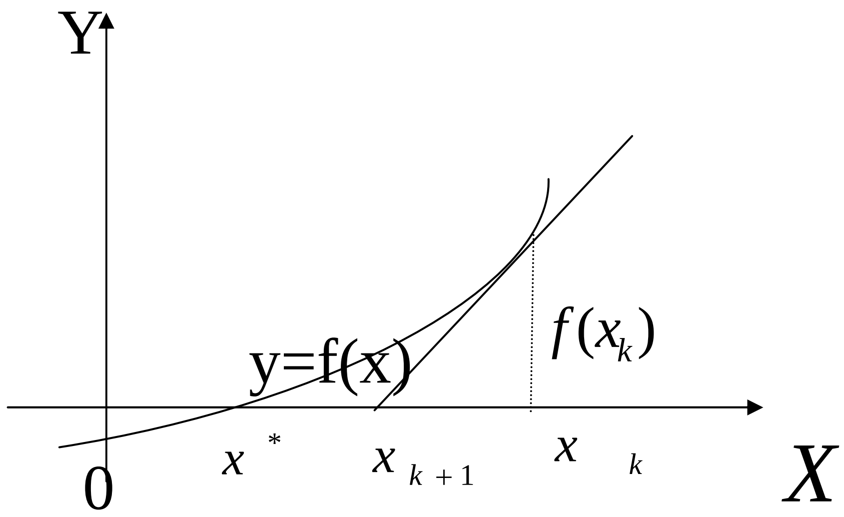
$$x^* = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)}(x^* - x_k)^2, \qquad (6.3.1)$$

其中 $\xi$在$x^*$与$x_k$之间 。若（6.3.1）的右端最后一项忽略不记，作为x*新的一个近似值，就有

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k=0,1,\ldots, \qquad (6.3.2)$$

这就是**Newton迭代法**。

对（6.3.2）可作如下的几何解释：$x_{k+1}$为函数f(x)在点$x_k$处的切线与横坐标轴的交点,见图6-3. 因此Newton迭代法也称为切线法.




将(6.3.2)写成一般的不动点迭代(6.2.3)的形式,有

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \qquad \varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

所以有 $\varphi'(x^*) = 0, (f'(x^*) \neq 0)$ Newton迭代法是超线性收敛的。更准确地,从(6.3.1)和(6.3.2)可得下面的定理.

**定理6.5** 设$f(x^*)=0,\ f'(x^*)\neq 0$，且f(x)在包含x*的一个区间上有二阶连续导数,则Newton迭代法（6.3.2）至少二阶收敛，并且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}.$$

以上讨论的是Newton法的局部收敛性。对于某些非线性方程，Newton法具有全局收敛性。

例6.8 设a>0,对方程 $x^2$-a=0试证:取任何初值 $x_0$ >0，Newton迭代法都收敛到算术根$\sqrt{a}$。

证 对f(x)= $x^2$ -a, Newton迭代法为

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right),\quad k=0,1,\ldots$$

由此可知

$$x_{k+1}-\sqrt{a}=\frac{1}{2x_k}(x_k^2-2x_k\sqrt{a}+a)=\frac{1}{2x_k}(x_k-\sqrt{a})^2,$$

$$x_k-x_{k+1}=\frac{1}{2x_k}(x_k^2-a).$$

可见,对于任何 $x_0$ **>0,**都有 $x_k \ge \sqrt{a}\,(k=1,2,\dots)$ **,**并且$\{x_k\}$非增**.**因此$\{x_k\}$是有下界的非增序列**,**从而有极限**x*.**对（**6.3.3**）的两边取极限**,**得到$(x^*)^2$ **-a=0,**因为 $x_k$ **>0,**故有**x*=** $\sqrt{a}$ 。

在定理**6.5**中**,**要求**f(x*)=0**，$f'(x^*)\neq 0$，即 $x^*$ 是方程的单根时**,Newton**法至少具有二阶局部收敛性。下面讨论重根的情形**.**

设**x***是**f(x)=0**的**m**重根**,** $m\ge 2$ ，即

$$f(x)=(x-x^*)^m g(x),\ g(x^*)\neq 0.$$

由**Newton**迭代函数$\varphi(x)$的导数表达式,容易求出

$$\varphi'(x^*) = 1 - \frac{1}{m}.$$

从而，$0 < \varphi'(x^*) < 1$ 。因此只要 $f'(x_k) \neq 0$ ，这时的**Newton**迭代法线性收敛。

为了改善重根时**Newton**法的收敛性，有如下两种方法。

若改为取

$$\varphi(x) = x - \frac{mf(x)}{f'(x)}$$

容易验证 $\varphi'(x^*) = 0$ 。迭代至少二阶收敛.

若令 $\mu(x) = {f(x)}\big/{f'(x)}$ ,由**x***是**f(x)**的**m**重零点，有

$$\mu(x)=\frac{(x-x^*)g(x)}{mg(x)+(x-x^*)g(x)}$$

所以，x*是 $\mu(x)$ 的单零点.可将Newton法的迭代函数修改为

$$\varphi(x)=x-\frac{\mu(x)}{\mu'(x)}=x-\frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}.$$

这种方法也是至少二阶收敛的.

例6.9 方程 $x^4-4x^2+4=0$ 的根 $x^*=\sqrt{2}$ 是二重根.用三种方法求解.

解 (1)用Newton法有

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-2}{4x_k}.$$

**(2)由(6.3.4),m=2迭代公式为**

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-2}{2x_k}.$$

**(3) 由(6.3.5)确定的修改方法，迭代公式化简为**

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k(x_k^2-2)}{x_k^2+2}.$$

三种方法均取 $x_0$=1.5,计算结果列于表6-7.方法（2）和方法(3)都是二阶方法，$x_0$都达到了误差限为 $10^{-9}$的精确度,而普通的Newton法是一阶的,要近30次迭代才有相同精度的结果.

## 表6-7

| $X_k$ | $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
|---|---|---|---|---|
| 方法(1) | 1.5 | 1.458333333 | 1.436607143 | 1.425497619 |
| 方法(2) | 1.5 | 1.416666667 | 1.414215686 | 1.414213562 |
| 方法(3) | 1.5 | 1.411764706 | 1.414211438 | 1.414213562 |

**Newton**法的每步计算都要求提供函数的导数值，当函数 **f(x)** 比较复杂时，提供它的导数值往往是有困难的。此时，在**Newton**迭代法（**6.3.2**）中，可用 $f'(x_0)$或常数**D**取代 $f'(x_k)$，迭代式变为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)} \quad \text{或} \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{D}.$$

这称为**简化Newton法**。其迭代函数为

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x_0)}\text{或}\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{D}\text{。}$$

通常 $\varphi'(x^*)\neq 0$ 简化Newton法一般为线性收敛。

## 6.3.2 割线法与抛物线法

为了回避导数值 $f'(x_k)$ 的计算，除了前面的简化Newton法之外，我们也可用点$x_k$，$x_{k-1}$ 上的差商代替 $f'(x_k)$ ，得到迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}f(x_k)$$

这就是割线法的计算公式。其几何解释为通过 $(x_k,f(x_k))$ 和 $(x_{k-1},f(x_{k-1}))$ 作 $y=f(x)$的割线，割线与x轴交点的横坐标是 $x_{k+1}$ 。

与Newton法不同的是，用割线法计算 $x_{k+1}$ 时，需要有两个初始值 $x_0$和 $x_1$ 。计算 $x_{k+1}$时，要保留上步的$f(x_{k-1})$和 $x_{k-1}$ ，再计算一次函数值 $f(x_k)$。所以割线法是一种两步迭代法，不能直接用单步迭代法收敛性分析的结果。下面给出割线法收敛性的定理。

**定理6.6** 设 $f(x^*)=0$ ,在区间 $\Delta=[x^*-\delta,x^*+\delta]$ 上的二阶导数连续,且 $f'(x)\neq 0$又设 $M\delta<1$,其中

$$M=\frac{\max_{x\in\Delta}|f''(x)|}{2\min_{x\in\Delta}|f'(x)|} \qquad (6.3.7)$$

则当 $x_0,x_1\in\Delta$ 时，由（6.3.6）式产生的序列 $\{x_k\}\subset\Delta$，并且按 $p=(1+\sqrt{5})/2\approx 1.618$ 阶收敛到根 $x^*$。

证 由（6.3.6）两边减去 $x^*$，利用均差的记号有

$$x_{k+1}-x^*=x_k-x^*-\frac{f(x_k)-f(x^*)}{f[x_{k-1},x_k]}$$

$$=(x_k-x^*)[1-\frac{f[x_k,x^*]}{f[x_{k-1},x_k]}]$$

$$=(x_k-x^*)(x_{k-1}-x^*)\frac{f[x_{k-1},x_k,x^*]}{f[x_{k-1},x_k]} \qquad (6.3.8)$$

因**f(x)**有二阶导数，所以有

$$f[x_{k-1},x_k]=f'(\eta_k) \qquad f[x_{k-1},x_k,x^*]=\frac{1}{2}f''(\zeta_k)$$

其中 $\eta_k$在 $x_{k-1},x_k$之间，$\zeta_k$ 在包含 $x_{k-1},x_k,x^*$ 的最小区间上。仍记$e_k=x_k-x^*$，由（**6.3.8**）有

$$e_{k+1}=\frac{f''(\zeta_k)}{2f'(\eta_k)}e_ke_{k-1} \qquad (6.3.9)$$

若$|e_{k-1}|<\delta, |e_k|<\delta$ 则利用（**6.3.7**）和$M\delta<1$得：

$$|e_{k+1}| \le M|e_k||e_{k-1}| \le M\delta^2 < \delta$$

这说明$x_0, x_1 \in \Delta$时，序列$\{x_k\} \subset \Delta$。又由于：

$$|e_k| \le M|e_{k-1}||e_{k-2}| \le M\delta|e_{k-1}| \le \cdots\cdots \le (M\delta)^k|e_0|$$

所以，当$k \to \infty$时，$e_k \to 0$，即$\{x_k\}$收敛到$x^*$。从上式也可知割线法至少是一阶收敛的。

进一步确定收敛的阶，这里我们给出一个不严格的证明。由（**6.3.9**）有

$$|e_{k+!}| \approx M^*|e_k||e_{k+1}| \qquad (6.3.10)$$

这里$M^* = |f''(x^*)|/|2f'(x^*)|$。令$d^{m_k} = M^*|e_k|$，代入（**6.3.10**）得

$$m_{k+1} \approx m_k + m_{k+1} \qquad m_0 = M^*|e_0| \qquad m_1 = M^*|e_1|$$

我们知道，差分方程 $z_{k+1}=z_k+z_{k-1}$ 的通解为 $z_k=c_1\lambda_1^k+c_2\lambda_2^k$，这里，$c_1,c_2$ 为任意常数，

$$\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618 \qquad \lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\approx -0.618$$

$\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 是方程 $\lambda^2-\lambda-1=0$ 的两个跟。当k充分大时，设 $m_k\approx c\lambda_1^k$，c为常数，则有

$$\frac{|e_{k+1}|}{|e_k^{\lambda_1}|}=(M^*)^{\lambda_1-1}d^{m_{k+!}-\lambda_1 m_k}\approx(M^*)^{\lambda_1-1}$$

这说明割线法的收敛阶为 $\lambda_1\approx 1.618$。定理证毕 。

类似于简单Newton法，有如下的单点割线法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-x_0}{f(x_k)-f(x_0)}f(x_k),k=1,2,\cdots$$

其迭代函数为 $$\varphi(x) = x_k - \frac{f(x)(x-x_0)}{f(x)-f(x_0)}$$

于是 $$\varphi'(x^*) = 1 - \frac{f'(x^*)}{f'(\zeta)}$$

其中 $\zeta$ 在 $x_0$ 和 $x^*$ 之间。由此可见，单点割线法一般为线形收敛。但当 $f'(x)$ 变化不大时，$\varphi'(x^*) \approx 0$ ，收敛仍可能很快。

例**10** 分别用单点割线法，割线法和**Newton**法求解**Leonardo**方程 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$

解 $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$ $\quad f''(x) = 6x + 4$

由于 $f'(x) > 0, f(1) = -7 < 0, f(2) = 12 > 0$ 故，在（**1**，**2**）内仅有一个根。对于单点割线法和割线法，取 $x_0 = 1, x_1 = 2$ 计算结果如表**6-8**。

对于Newton法，由于在（0.2）内 $f''(x)>0, f(2)>0$，故取 $x_0=2$，计算结果如表6-8

表 6-8

| | 单点割线法 | 割线法 | Newton法 |
|---|---|---|---|
| | 1.368421053 | 1.368421053 | 1.383388704 |
| | 1.368851263 | 1.368850469 | 1.368869419 |
| | 1.368803298 | 1.368808104 | 1.368808109 |
| $x_5$ | 1.368808644 | 1.368808108 | 1.368808108 |

由计算结果知，对单点割线法有 $\left|x_5-x_4\right|\approx 0.5\times10^{-5}$，对割线法有 $\left|x_5-x_4\right|\approx 0.4\times10^{-8}$，对Newton法有 $\left|x_5-x_4\right|\approx 0.1\times10^{-8}$，故取 $x^*\approx 1.368808108$

割线法的收敛阶虽然低于**Newton**法，但迭代一次只需计算一次 $f(x_k)$ 函数值，不需计算导数值 $f'(x_k)$ 所以效率高，实际问题中经常使用。与割线法类似，我们可通过三点 $(x_i, f(x_i))(i=k-2,k-1.,k)$ 作一条抛物线，适当选取它与x轴交点的横坐标作为 $x_{k+1}$ 这样产生迭代序列的方法称为抛物线法，亦称**Muller**方法。

下面给出抛物线法的计算公式。过三点

$$(x_i, f(x_i))(i=k-2,k-1.,k)$$

的插值多项式为

$$p_2(x)=f(x_k)+f[x_k,x_{k+1}](x-x_k)+f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}](x-x_k)(x-x_{k-1})$$

$$=f(x_k)+\omega_k(x-x_k)+f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}](x-x_k)^2$$

其中 $\omega_k=f[x_k,x_{k-1}]+(x_k-x_{k-1})f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}]$

二次方程 $p_2(x)=0$ 有两个根，我们选择接近 $x_k$ 的一个作 $x_{k+1}$，即得迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{2f(x_k)}{\omega_k+\text{sgn}(\omega_k)\sqrt{\omega_k^2-4f(x_k)f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}]}} \quad (6.3.11)$$

把根式写到分母是为例避免有效数字的损失。

可以证明（6.3.11）产生的序列局部收敛到 $f(x)$ 的零点 $x^*$，即有类似于定理6.6的结论。这里要假设 $f(x)$ 在 $x^*$ 的领域内三阶导数连续，$f''(x^*)\neq 0$。它的收敛阶是 $p\approx 1.839$，这是方程

$$\lambda^3-\lambda^2-\lambda-1=0$$

的根。收敛速度比割线法更接近于**Newton**法。