6.2 一元方程的不动点迭代法

6.2.1 不动点迭代法及其收敛性

6.2.2 局部收敛性和加速收敛法

6.2.1 不动点迭代法及其收敛性

设一元函数$f(x)$是连续的，为了求一元非线性方程

$$f(x)=0 \qquad (6.2.1)$$

的实根，先将它转化成等价形式

$$x=\varphi(x_k), \qquad (6.2.2)$$

其中$\varphi(x)$是一个连续函数。然后构造迭代公式

$$x_{k+1}=\varphi(x_k),\ k=0,1,\ldots。 \qquad (6.2.3)$$

对于给定的初值x_0,若由此迭代生成的序列$\{x_k\}$有极限，

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$,则有$x^* = \varphi(x^*)$,既$x^*$满足方程（6.2.2），从而按等价性，$x^*$也是方程（6.2.1）的根。

迭代式（6.2.3）称为基本迭代法，$\varphi(x)$称为迭代函数, x^*称为$\varphi(x)$的不动点，式（6.2.3）也称为不动点迭代法。迭代过程中，x_{k+1}仅由x_k决定，因此，这是一种单步法。

把（6.2.1）转换成等价形式（6.2.2）的方法很多，迭代函数的不同选择对应不同的迭代法，它们的收敛性可能有很大的差异。当方程有多个解时，同一迭代法的不同初值，也可能收敛到不同的根。举例说明如下。

例6.2　求$f(x)=x^3-x-1=0$的一个实根。

解　把$f(x)=0$转换成两种等价形式

$$x=\varphi_1(x)=\sqrt[3]{x+1},\ x=\varphi_2(x)=x^3-1,$$

对应的迭代法分别为

$$x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k+1},\ x_{k+1}=x^3-1,\ k=0,1,\ldots。$$

由于$f(1)=-1,\ f(2)=5$,既连续函数$f(x)$在区间[1,2]内变号从而[1,2]为有根区间。取它的中 点为初值，既令$x_0=1.5$,迭代结果列于表$6-2$。此方程有唯一实根$x^*=1.3247179 5724475$。显然第一个迭代法收 敛，第二个迭代法发散 。

表 6-2

k	0	1	2		11
$\sqrt[3]{x_k+1}$	1.5	1.35720881	1.33086096	…	1.32471796
x_k^3-1	1.5	2.37500000	12.3964844	…	$\to +\infty$

例 6.3 求$f(x)=x^2-2=0$的根。

解 把$f(x)=0$转换成等价形式

$$x=\varphi(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{2}{x}),$$

对应的迭代法为 $x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{2}{x_k}),k=0,1,\ldots$。

取初值$x_0=\pm 1$，迭代结果分别收敛到$x^*=\pm\sqrt{2}$，计算结果如表6－3所示。

表6-3

k	0	1	2	3	4	5
x_k	1	1.5	1.41666667	1.41421569	1.41421356	1.41421356
x_k	-1	-1.5	1.41666667	-1.41421569	-1.41421356	-1.41421356

由此可见，基本迭代法的收敛性质取决于迭代函数$\varphi(x)$和初值x_0的选取。下面给出迭代法(6.2.3)的收敛性基本定理。

定理6.1　　设函数$\varphi(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，并且满足

(1)对任意$x\in[a,b]$，有$\varphi(x)\in[a,b]$;

(2)存在正数 $L<1$,使对任意 $x,y\in[a,b]$,有。

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leq L|x-y|。\qquad (6.2.4)$$

则对方程（6.2.2）有

(1)函数$\varphi(x)$在闭区间$[a,b]$上存在唯一的不动点x^*。

(2)对于任何初值$x_0\in[a,b]$,由迭代法（6.2.3）生成的序列$\{x_k\}$收敛到不动点x^*。

(3)有误差估计式

$$\left|x_k-x^*\right|\le\frac{L}{1-L}\left|x_k-x_{k-1}\right|。\qquad（6.2.5）$$

证 令$\psi(x)=x-\varphi(x)$，则由$\varphi(x)\in[a,b]$知，$\psi(a)\le 0,\psi(b)\ge 0$。因为$\psi(x)$是连续函数，故它在$[a,b]$上有零点，既$\varphi(x)$在$[a,b]$上有不动点$x^*$。若$\varphi(x)$在$[a,b]$上有两个相异的不动点$x_1^*,x_2^*$,则有

$$\left|x_1^* - x_2^*\right| = \left|\varphi(x_1^*) - \varphi(x_2^*)\right| \le L\left|x_1^* - x_2^*\right| < \left|x_1^* - x_2^*\right|,$$

这是个矛盾式子，因此$\varphi(x)$在$[a,b]$上只有一个不动点。

显然有$x_k \in [a,b], k = 0,1,\ldots,$进而

$$\left|x_k - x^*\right| = \left|\varphi(x_{k-1}) - \varphi(x^*)\right| \le L\left|x_{k-1} - x^*\right| \le \cdots \le L^k\left|x_0 - x^*\right|。$$

从而$\lim\limits_{k\to\infty}\left|x_k - x^*\right| = 0,$既$\lim\limits_{k\to\infty} = x^*$。

显然有

$$\left|x_{k+1} - x_k\right| = \left|\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\right| \le L\left|x_k - x_{k-1}\right|,$$

进而,对任意的正整数 p，同理可得

$$
\begin{aligned}
\left|x_{k+p}-x_k\right| &\le \left|x_{k+p}-x_{k+p-1}\right|+\cdots+\left|x_{k+2}-x_{k+1}\right|+\left|x_{k+1}-x_k\right| \\
&\le (L^{p-1}+\cdots+L+1)\left|x_{k+1}-x_k\right|。
\end{aligned}
$$

因为$0<L<1$，从而$(1-L)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}L^k>1+L+\cdots+L^{p-1}$,

$$
\left|x_{k+p}-x_k\right| \le \frac{1}{1-L}\left|x_{k+1}-x_k\right| \le \frac{L}{1-L}\left|x_k-x_{k-1}\right|。
$$

令$p\to+\infty$,由收敛性既得(6.2.5),定理得证。

如果函数$\varphi(x)$在区间（a,b）内可导，那么定理6.1中的条件（2）可用更强的条件

$$\left|\varphi'(x)\right| \le L < 1, \forall x \in (a,b) \qquad （6.2.6）$$

代替。事实上，若上式成立，则由微分中值定理，对任何$x, y \in [a,b]$都有

$$\left|\varphi(x) - \varphi(y)\right| = \left|\varphi'(\xi)(x-y)\right| \le L(x-y),$$

其中ξ在x与y之间，从而条件（6.2.4）成立。

由估计式（6.2.5）可知，只要相邻两次计算结果的偏差$\left|x_k - x_{k-1}\right|$足够小，且$L$不很接近1，既可保证近似值$x_k$具有足够的精度。因此，可以通过检查$\left|x_k - x_{k-1}\right|$的大小来判断迭代过程是否终止。并且，由（6.2.5）有

$$\left|x_k - x^*\right| \le \frac{L^K}{1-L}\left|x_1 - x_0\right|。\qquad \textbf{(6.2.7)}$$

如果能恰当计算出L的值，则由（6.2.7），我们可对给定的精度确定出需要迭代的次数。

函数$\varphi(x)$的不动点x^*,在几何上是直线$y = x$与曲线$y = \varphi(x)$的交点的横坐标。因此，定理6.2的几何解释如图$6-2$所示，其中图（a）是收敛的情形,图(b)是发散的情形。

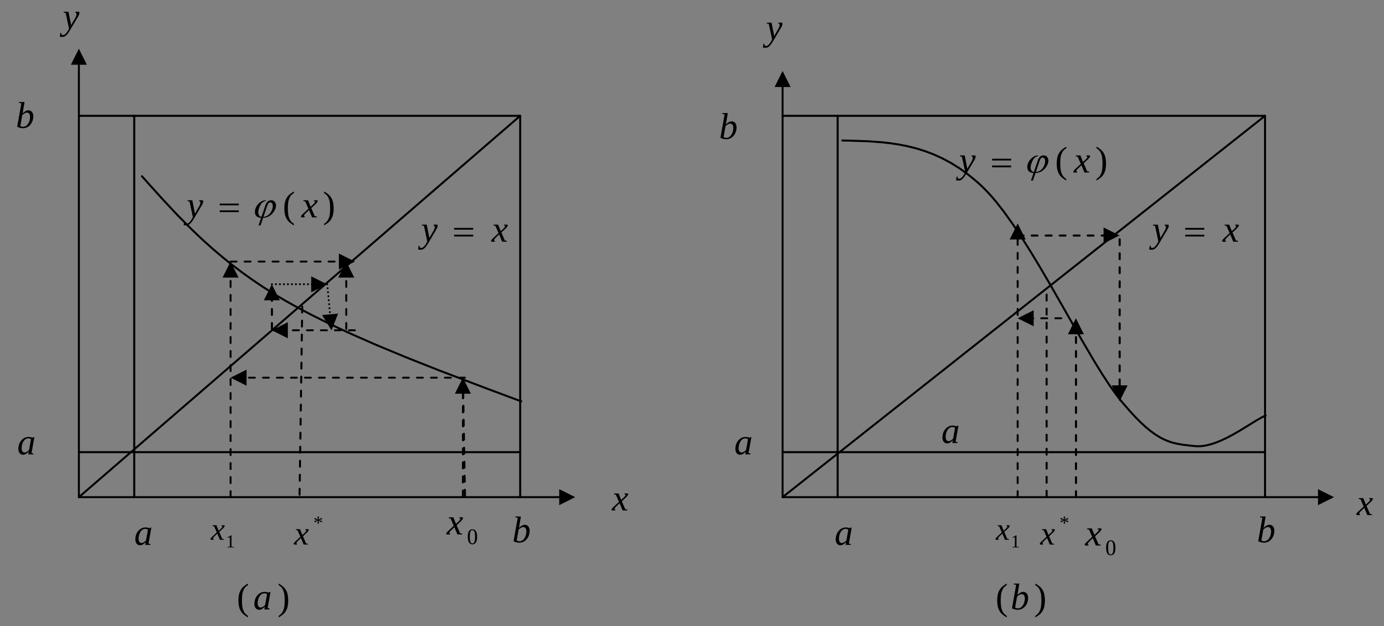

图6－2

例6.4　对于例6.2的两种迭代法，讨论它们的收敛性。

解　对于迭代函数$\varphi_1(x)=\sqrt[3]{x+1}$,其导数$\varphi'_1(x)=\dfrac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$。

容易验证，对任意$x\in[1,2]$有

$$\varphi_1(x)\in[1.26,1.45]\subset[1,2],\varphi'_1(x)\le 0.21<1。$$

因此，对于任何初值$x_0\in[1,2]$，由$\varphi_1(x)$给出的迭代法都收敛到区间$[1,2]$上的唯一不动点x^*。

对于迭代函数$\varphi_2(x)=x^3-1$，其导数$\varphi'_2(x)=3x^2$。显然，对$x\in[1,2]$有$\varphi_2(x)\in[0,7]$，$\varphi'_2(x)>1$，不满足定理6.1的条件。从几何上可以说明，只要初值$x_0\ne x^*$，该迭代法发散。

有时，对于一些不满足定理6.1的条件问题，可以通过转化，化为适合于迭代的形式。这要针对具体情况进行讨论。

例6.5 已知 $x=\varphi(x)$的 $\varphi'(x)$满足 $\left|\varphi'(x)-3\right|<1$,试问如何利用 $\varphi(x)$构造一个收敛的简单迭 代函数?

解 由$x=\varphi(x)$，可得

$$x-3x=\varphi(x)-3x,$$

即可得等价方程

$$x=\frac{1}{2}(3x-\varphi(x))。$$

因此，令 $\psi(x)=\frac{1}{2}(3x-\varphi(x))$

则有 $\left|\psi(x)\right|=\frac{1}{2}\left|3-\varphi'(x)\right|<\frac{1}{2},$

因此，迭代式 $x_{k+1}=\psi(x_k)\quad(k=0,1,\cdots)$收敛。

6.2.2 局部收敛性和加速收敛法

由于定理 6.1讨论的是迭代法在区间 $[a,b]$上的收敛性，因而，可以称之 为全局收敛性定理。全 局收敛性也包括在无穷区间 上收敛的情形。但一般 说来，全局收敛性的情形不易 检验。所以常常讨论在 根x^*附近的收敛性问题。为此 ，给出如下定义。

定义6.1 设x^*是$\varphi(x)$的不动点，若存在 x^*的一个邻域 $s(x^*,\delta)=[x^*-\delta,x^*+\delta],\delta>0,$使得对任何初值 $x_0\in$ s（x^*，δ），有迭代法（ 6.2.3）生成的序列满足 $\{x_k\}\subset s(x^*,\delta),$且收敛到 x^*，则称迭代法（ 6.2.3）是局部收敛的。

定理 6.2 设x^*是$\varphi(x)$的一个不动点，$\varphi'(x)$在x^*的某个邻域上连续，并且有$|\varphi'(x^*)|<1$,则迭代法（6.2.3）局部收敛。

证 因为 $\varphi'(x)$在x^*处连续，且 $|\phi'(x^*)|<1$,所以存在x^*的一个闭邻域 $[x^*-\delta, x^*+\delta]$,在其上 $|\varphi'(x)|\le L<1$,并且有

$$|\varphi(x)-x^*|=|\varphi(x)-\varphi(x)|\le L|x-x^*|<\delta,$$

即对一切$x\in[x^*-\delta, x^*+\delta]$，有$\varphi(x)\in[x^*-\delta, x^*+\delta]$。根据定理6.1，对任意$x_0\in[x^*-\delta, x^*+\delta]$,迭代法（6.2.3）收敛。定理得证。

上述定理称为局部收敛定理，它给出了局部收敛的一个

充分条件。当迭代收敛时，收敛的快慢用下述收敛阶段来衡量。

定义6.2 设序列 $\{x_k\}$收敛到 x^*,记误差 $e_k = x_k - x^*$。若存在实数 $p \geq 1$和$c \neq 0$，使得

$$\lim_{k \to \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = c \qquad \textbf{(6.2.8)}$$

则称序列 $\{x_k\}$是p阶收敛的，当 $p = 1$时，称为线性收敛。当 $p > 1$时，称为超线性收敛。 当$p = 2$时，称为平方收敛。

式（6.2.8）表明，当 $k \to \infty$时，e_{k+1}是e_k的p阶无穷小量因此，阶数 p越大，收敛越快。如果 是线性收敛的，（6.2.8）中的常数满足 $0 < |c| \leq 1$。

如果在定理6.2中，还有$\varphi'(x^*) \neq 0$,即$\varphi'(x^*)$满足$0 < |\varphi'(x^*)| < 1$,则

对 $x_0 \neq x^*$，必有 $x_k \neq x^*$,**k=1,2,…，** 而且

$$e_{k+1}=x_{k+1}-x^*=\varphi(x_k)-\varphi(x^*)=\varphi'(\xi_k)e_k$$

其中在 ξ_k 与 x^* 之间。于是

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k}=\lim_{k\to\infty}\varphi'(\xi_k)=\varphi'(x^*)\neq 0。$$

从而，在这种情况下，**{x$_k$}**是线性收敛的。可见，提高收敛阶的一个途径是选择迭代函数 $\varphi(x)$ ，使它足 $\varphi'(x^*)=0$。下面给出整数阶超线形收敛的一个充分条件。

定理6.3 设 x^* 是 $\varphi(x)$ 的一个不动点，若有正整数**p**≥**2,**使得 $\varphi^p(x)$ 在 x^* 的领域上连续，并且满足

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0,\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0,$$

则由迭代法生成的序列在的领域是**p**阶收敛的，且有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k}=\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}$$

证　因 $\varphi'(x^*)=0$，由定理**6.2**知迭代法**(6.2.3)**是局部收敛的。取充分接近 x^* 的 x_0，设 $x_0\neq x^*$ 有 $x_k\neq x^*$，**k=1,2,…**。由**Taylor**展开式有

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\varphi'(x^*)(x_k-x^*)+\cdots$$

$$+\frac{\varphi^{p-1}(x^*)}{(p-1)!}(x_k-x^*)^{p-1}+\frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k-x^*)^p,$$

其中 ξ_k 在 x_k 与 x^* 之间。由**(6.2.9)**有

$$x_{k+1} - x^* = \frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_{k+1} - x^*).$$

由 $\varphi^p(x)$ 的连续性可得**(6.2.10)**。定理得证。

对于线形收敛的迭代法，常常收敛的很慢，所以要在这些迭代法的基础上考虑加速收敛的方法。

设 $\{x_k\}$ 线性收敛到 x^*,则迭代误差 满足 $e_k = x_k - x^*$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} = c \neq 0.$$

因此，当**k**充分大时有

$$\frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} \approx \frac{x_{k+2} - x^*}{x_{k+1} - x^*},$$

从中解出 x^* 得

$$x^* \approx x_{k+2} - \frac{(x_{k+2} - x_{k+1})^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}.$$

所以，我们在计算了 x_k, x_{k+1} 和 x_{k+2} 之后，x_{k+2} 可以用上式右端作为的一个修正值。这样，我们可将迭代法改造成下述过程，称为***Steffensen迭代法***：

$$\begin{cases} y_k = \varphi(x_k), \qquad z_k = \varphi(y_k), \\ x_{k+1} = z_k - \dfrac{(z_k - y_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k} \qquad k = 0,1,\cdots \end{cases}$$

它的不动点形式是

$$x_{k+1} = \psi(x_k), k = 0,1,\cdots$$

其中的迭代函数为

$$\psi(x)=\frac{x\varphi(\varphi(x))-\varphi^2(x)}{\varphi(\varphi(x))-2\varphi(x)+x}=x-\frac{[\varphi(x)-x]^2}{\varphi(\varphi(x))-2\varphi(x)+x}$$

例6.6 求方程的根。$f(x)=xe^x-1=0$ 。

解 此方程等价于 $x=\varphi(x)=e^{-x}$ 。由**y=x**和 $y=e^{-x}$ 可以看出 $\varphi(x)$ 只有一个不动点**x*>0,**都有 $0<\left|\varphi'(x)\right|=e^{-x}<1$ **,**所以迭代法 $x_{k+1}=e^{-x_k}$ 线性收敛。取初始值 x_0 **=0.5**，迭代结果列于表**6—4**。准确解是 x^* **=0.56714329040978…**，可见线性收敛的速度是很慢的。

表**6—4**

K	0	1	…	28	29
X_k	0.5	0.606530660	…	0.567143282	0.567143295

如果使用**Steffensen**迭代法，仍取初值**x0=0.5.**则

$$y_k = e^{-x_k}, z_k = e^{-y_k},$$

$$x_{k+1} = z_k - \frac{(z_k - y_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}, k = 0,1,\ldots 。$$

计算结果列于表**6—5**。与表**6—4**比较，可见**Steffensen**迭代法比原方法收敛快得多，仅迭代**4**次就达到了原方法**29**次的结果。

表**6—5**

K	0	1	2	3	4
X_k	0.5	0.567623876	0.567143314	0.567143290	0.567143290

定理6.4 设函数按（**6.2.13**）定义。

（**1**）若**x***是 $\varphi(x)$ 的不动点,$\varphi'(x)$在**x***处连续，且$\varphi'(x^*)\neq 1$，则 **x***也是的不动点；反之，若**x***是$\psi(x)$的不动点，则**x***也是的$\varphi(x)$的不动点。

（**2**）若**x***是$\varphi(x)$的不动点，$\varphi''(x)$ 在**x***处连续，且$\varphi'(x^*)\neq 1$，则**Steffensen**迭代法**(6.2.11**）至少具有二阶局部收敛性。

证 （**1**）若**x*=** $\varphi(x^*)$，则当**x=x***时，（**6.2.13**）式的分子分母都为零。对它的极限用**L’Hospitale**法则，由于 $\varphi'(x^*)$,≠得知

$$\lim_{x\to x^*}\psi(x)=\lim_{x\to x^*}\frac{\varphi(\varphi(x))+x\varphi'(\varphi(x))\varphi'(x)-2\varphi(x)\varphi'(x)}{\varphi'(\varphi(x))\varphi'(x)-2\varphi'(x)+1}=\frac{x^*[\varphi'(x^*)-1]^2}{[\varphi'(x^*)-1]^2}=x^*$$

从而 $x^*=\psi(x^*)$。反之，若 $x^*=\psi(x^*)$，则由（**6.2.13**）得知 $x^*=\varphi(x^*)$。

（2）由（1）可知x* 是 $\psi(x)$ 的不动点，于是，由定理6.3，只要证明 $\varphi'(x^*)=0$ 。对（6.2.13）两边求导得

$$1-\psi'(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

其中

$$p(x)=2[\varphi(x)-x][\varphi'(x)-1][\varphi(\varphi(x))-2\varphi(x)+x]$$

$$-[\varphi(x)-x]^2[\varphi'(\varphi(x))\varphi'(x)-2\varphi'(x)+1],$$

$$q(x)=[\varphi(\varphi(x))-2\varphi(x)+x]^2$$

并且容易算出

$$p''(x^*)=q''(x*)=2[\varphi'(x^*)-1]^4$$

于是，由 $\varphi'(x^*)\neq 1$，可知 $p''(x^*)=q''(x^*)\neq 0$。对（6.2.14）的两边求极限，因为x*至少是 p(x)和q(x)二重根，所以，使用两次L’Hospitale法则得

$$1-\psi'(x^*)=\lim_{x\to x^*}[1-\psi'(x)]=\lim_{x\to x^*}\frac{p''(x)}{q''(x)}=1,$$

从而 $\psi'(x^*)=0$。定理得证。

可见，在定理**6.4**的条件下，不管原迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛还是不收敛，由它构成的**Steffensen**迭代式（**6.2.11**）至少平方收敛。因此，**Steffensen**迭代法是对原迭代法的一种改善。关于原迭代法不收敛的情形，举例如下。

例6.7 用Steffensen迭代法求方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 的实根。

解 由例**6.4**可知，迭代法$x_{k+1}=x_k^3-1$发散。现用$\varphi_2(x)=x^3-1$构造**Steffensen**迭代法。

$$y_k = x_k^3 - 1, \quad z_k = y_k^3 - 1,$$
$$x_{k+1} = z_k - \frac{(z_k - y_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}.$$

仍取初值 x_0 **=1.5,**计算结果如表**6—6**。可见，**Steffensen**迭代法对这种不收敛的情形同样有效。

表**6—6**

K	0	1	…	5	6
X_k	1.5	1.41629297	…	1.32471799	1.32471796