第6章 非线性方程和方程组的数值解法

教学目的

1. 掌握解非线性方程（组）的二分法和插值法；
2. 掌握解非线性方程（组）的一般迭代法及有关收敛性的证明与牛顿法；
3. 掌握解非线性方程（组）的牛顿法
4. 了解加速收敛的方法。

教学重点及难点

重点是解非线性方程（组）的牛顿法；
难点是迭代法的收敛性的证明。

第6章 非线性方程和方程组的数值解法

一般的非线性方程组可写成F(x)=0,其中F和x都是n维向量，或写成

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, i = 1,2,\cdots,n,$$

其中，$f_1, f_2, \cdots, f_n$ 中至少有一个是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的非线性函数。当n=1时，就是单个的方程f(x)=0。非线性方程和方程组的求解是工程和科学领域中最常见的问题。下面举一个例子：

考虑两环节机器人手臂定位问题。设两节臂长分别为d_1和d_2，如图6-1所示，第一臂与水平方向所成的角为 α ，第二臂与第一臂所成的角为 β 。问题是求 α 和 β ，使第二臂的端点位于适当的位置，比如其坐标为(p_1, p_2)

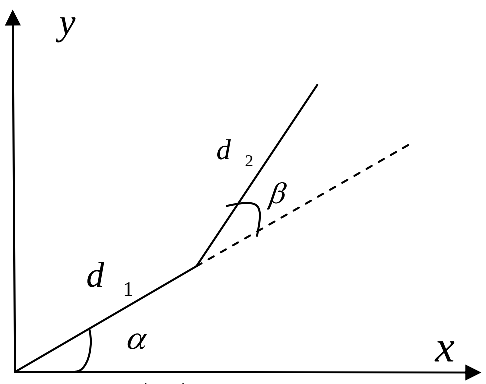

图6-1

设第一臂和第二臂的端　点坐标分别为 (x_1, y_1)和(x_2, y_2)，则有

$$\begin{cases} x_1 = d_1 \cos\alpha, \\ y_1 = d_1 \sin\alpha. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + d_2 \cos(\alpha + \beta), \\ y_2 = y_1 + d_2 \sin(\alpha + \beta). \end{cases}$$

这样，我们的问题是要解下列方程组

$$\begin{cases} d_1 \cos\alpha + d_2 \cos(\alpha + \beta) = p_1 \\ d_2 \sin\alpha + d_2 \sin(\alpha + \beta) = p_2 \end{cases}$$

显然，这是一个关于α和β的非线性方程组。

与线性方程组不同，除特殊情况外，求解非线性方程不能用直接法求数值解，而是要用迭代法。迭代法的基本问题是收敛性、收敛速度和计算效率。

对于线性方程组，如前所述，若某迭代法收敛，则取任何初值都收敛。但是，对于非线性方程，不同的初值可能有不同的收敛性态，有的初值使迭代收敛，有的则不收敛。一般说来，为使迭代法收敛，初值应取在解的附近。

我们先详细讨论单个方程的情形，其中有一类是形如

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

的代数方程。当 $n \geq 5$ 时，其根是不能用加、减、乘、除和开方的有限次运算公式表示的，所以代数方程的解法也主要是迭代法。

方程的数值解法的收敛性，也与方程根的重数有关。对于一般的函数 $f(x)\in C[a,b]$，若有

$$f(x)=(x-x^*)^m g(x),\ g(x)\neq 0,$$

其中m为正整数，我们称 x^*是f(x)的m重零点，或称x^*是方程f(x)=0的m重根。显然，若x^* 是f(x)的m重零点，且g(x)充分光滑，则有

$$f(x^*)=f'(x^*)=\dots=f^{(m-1)}(x^*)=0,\ f^{(m)}(x^*)\neq 0$$

当m为奇数时，f(x)在x^*点处变号，当m为偶数时，f(x)在x^*点处不变号。

6.1 方程求根的二分法

设 $f(x) \in C[a,b]$,若 $f(a)f(b) < 0$,则方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内至少有一个根，称 $[a,b]$ 为方程的有根区间。通过缩小有根区间，我们可以形成方程求根的数值解法。

下面我们给出方程求根的二分法。

设 $[a_0,b_0]=[a,b]$ 为有限区间，$[a_n,b_n]$ 的中点是 x_n，若有 $f(a_n)f(x_n) < 0$,则令新的有根区间

$[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,x_n]$,若 $f(a_n)f(x_n)>0$，则令 $[a_{n+1},b_{n+1}]=[x_n,b_n]$。这样，若反复二分下去，即可得出一系列有限区间。

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots\supset[a_n,b_n]\supset\ldots,$$

其中每个区间都是前一个区间的一半。

因此,$[a_k,b_k]$的长度

$$b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k}\to 0(k\to\infty).$$

由此可见，如果二分过程能无限地继续下去，这些区间最终必收敛于一点 x^*，该点显然就是所求的根。

每次二分之后，设去有限区间$[a_k, b_k]$的中点，$x_k = (a_k + b_k)/2$作为根的近似值，则在二分过程中可以获得一个近似根的序列$\{x_k\}$，该序列必以根x^*为极限。

在实际计算时，我们不可能完成这个无限过程，其实也没有这种必要，因为数值分析的结果允许带有一定的误差。由于

$$\left|x^{*}-x_{k}\right| \leq \frac{b_{k}-a_{k}}{2}=\frac{b-a}{2^{k+1}},$$

只要二分足够多次（即k充分大），

则有$\left|x^{*}-x_{k}\right|<\varepsilon$，这里$\varepsilon$位预定的精度。

例6.1 求方程$f(x)=x^{3}-x-1=0$在区间[1,1.5]内的一个实根，要求准确到小数点后的第2位。

解 这里$a=1, b=1.5$，$f(a)<0$，$f(b)>0$。取$[a,b]$的中点 $x_0=1.25$，将区间 $[a,b]$二等分，由于 $f(x_0)<0$，

即 $f(a)$ 与 $f(x_0)$ 同号，故在 x_0 的右侧有方程的一个实根，这时，令 $a_1 = x_0 = 1.25, b_1 = b = 1.5$ 而新的有限区间为 $[a_1, b_1]$。二分过程可如此反复下去，计算结果如表 $6-1$。

表6-1

k	0	1	2	3	4	5	6
a_k	1	1.25	1.25	1.3125	1.3125	1.3125	1.3203
b_k	1.5	1.5	1.375	1.375	1.3438	1.3281	1.3281
x_k	1.25	1.375	1.3125	1.3438	1.3281	1.3203	1.3242
$f(x_k)$	-	+	-	+	-	+	-

我们现在预估所要二的次数。令 $(b-a)/2^{k+1} \le 0.005$ 可得 $k \ge 6$，既二分 6 次就能达到预定的精度 $\left| x^* - x_6 \right| \le 0.005$，与实际计算结果相符。

上述二分法的优点是算法简单，而且在有限区间内，收敛性总能得到保证。值得注意的是，为了求出足够精确的近似解，往往需要计算很多次函数值，是一种收敛较慢的方法，通常用求根的粗略近似值，把它作为后面要讨论的迭代法的初始值。另一方面，二分法只使用于求一元方程的奇数重实根。

在二分法中，是逐次将有根区间折半。更一般地是，从有限区间的左端点出发，按预定的步长**h**一步一步地向右跨，每跨一步进行一次根的“搜索”，即检查所在节点上的函数值的符号，一旦发现其与左端的函数值异号，则可确定一个缩小了的有限区间，其宽度等于预定的步长**h**。然后，再对新的

有限区间，取新的更小的预定步长，继续“搜索”，直到有限区间的宽度足够小。称这种方法为逐步搜索法。