习题6

6.1　设有方程

$$(1)\ x-\cos x=0,\qquad (2)\ 3x^2-\ell^x=0。$$

确定区间$[a,b]$及迭代函数$\varphi(x)$，使$x_{k+1}=\varphi(x_k)$对任意$x_0\in[a,b]$均收敛，并求个方程的根，误差不超过10^{-4}。

6.2　设$f(x)=0$有根，且$0<m\le f'(x)\le M$，$-\infty<x<+\infty$。试证明：由$x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$产生的序列$\{x_k\}$对任意的$x_0$和$0<\lambda<2/M$均收敛于根。

6.3　已知在区间$[a,b]$内方程$x=\varphi(x)$只有一根，且

$$|\varphi'(x)|\ge k>1。$$

试问如何将$\varphi(x)$化为适合于迭代的形式？求$x=\tan x$在$x_0=4.5$附近的根，准确到4位小数。

6.4　对于$\varphi(x)=x+x^3, x^*=0$为$\varphi(x)$的一个不动点。验证$x_{k+1}=\varphi(x_k)$迭代对$x_0\neq 0$不收敛，但改用*Steffenson*方法却是收敛的。

6.5　用二分法和 *Newton* 法求$x-\tan x=0$的最小正根。

6.6　用下列方法求$f(x)=x^3-3x-1=0$在$x_0=2$附近的根。根的准确值$x^*=1.87938524\cdots$,要求计算结果准确到四位有效数字。

(1)　用*Newton*法，$x_0=2$。

(2)　用割线法，$x_0=2, x_1=1.9$。

(3)　用抛物线法，$x_0=1, x_1=3, x_2=2$。

6.7　讨论用*Newton*法求解方程$f(x)=0$的收敛性，其中

(1)　$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, x\geq 0, \\ -\sqrt{-x}, x<0。\end{cases}$　　(2)　$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^2}, x\geq 0, \\ -\sqrt[3]{x^2}, x<0。\end{cases}$

6.8　将*Newton*法用于解方程$x^3-a=0$,讨论其收敛性。

6.9　设x^*是方程$f(x)=0$的根，并且$f'(x)\neq 0$，$f''(x^*)$在x^*的邻域上连续。试证：*Newton*法的迭代序列$\{x_k\}$满足

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_k-x_{k-1}}{(x_{k-1}-x_{k-2})^2}=-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}。$$

6.10　构造一种不动点迭代法，求方程组

$$\begin{cases} x_1 - 0.7\sin x_1 - 0.2\cos x_2 = 0, \\ x_2 - 0.7\cos x_1 + 0.2\sin x_2 = 0, \end{cases}$$

在$x^{(0)} = (0.5,0.5)^T$附近的解，分析方法的收敛性，迭代至$x^{(3)}$或达到误差限为10^{-3}的精度。

6.11　用*Newton*法求解：

(1)6.10题的方程组,取$x^{(0)} = (0.5,0.5)^T$。

(2)$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x^2 - y^2 = 1, \end{cases}$取$x^{(0)} = (1.6,1.2)^T$。

6.12　用逆*Broyden*秩1方法求解6.11题中的两个方程。