



5.4 分块迭代法



5.4.1 分块迭代公式的构造

5.4.2 分块迭代法的收敛性



5.4.1 分块迭代公式的构造

前面所讨论的迭代法，一次只计算一个分量。要完成一次迭代，需要逐个地计算迭代解向量中的每一个分量，直到算出全部分量的值。然后再进行下一次迭代，使解向量达到计算精度为止。通常，称这种迭代法为**点迭代法**。

下面介绍更一般的迭代法，其基本思想是将方程 $Ax = b$ 中的 A 分块，将 x 和 b 也进行相应地分块，然后将每个子块视为一个元素，并按照点迭代法类似地进行迭代，称这种迭代法为**块迭代法**。下面给出具体描述。

设 $A \in R^{n \times n}$ 可写成分块形式

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rr} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ii} 为 $n_i \times n_i$ 的方阵， $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ 。向量 x 和 b 也相应地进行分块。



$$x = (x_1, x_2, \dots, x_r)^T, b = (b_1, b_2, \dots, b_r)^T,$$

其中 x_i 和 b_i 都是 n_i 维的向量。

令 $A = D_B - L_B - U_B$, 其中 $D_B = \text{diag}(A_{11}, A_{22}, \dots, A_{rr})$,

$$L_B = - \begin{pmatrix} 0 & & & \\ A_{21} & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ A_{r1} & \cdots & A_{r,r-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad U_B = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & A_{r-1,r} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

类似于点迭代法, 可分别得到求解方程组 $Ax = b$ 的 **Jacobi** 迭代法:

$$A_{ii}x^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^r A_{ij}x_j^{(k)}, i = 1, 2, \dots, r. \quad (5.4.1)$$

块 Gauss - Seidel 迭代法:

$$A_{ii}x^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^r A_{ij}x_j^{(k)}, i = 1, 2, \dots, r. \quad (5.4.2)$$



块超松弛法:

$$A_{ii}x_i^{(k+1)} = A_{ii}x_i^{(k)} + \omega(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^r A_{ij}x_j^{(k)}), i = 1, 2, \dots, r. \quad (5.4.3)$$

在实际计算中, 对每个 i , (5.4.1) ~ (5.4.3) 都分别是 $n_i \times n_i$ 的方程组, 一般用直接方法求解。在大型方程组的情形, n 是大数, 而 n_i 相对是较小的。当 $n_1 = n_2 = \dots = n_r = 1$ 时, 就是点迭代法。

5.4.2 分块迭代法的收敛性

对于块迭代法, 也有相应于点迭代法的收敛性判定定理。在偏微分方程数值中, 常常会遇到特殊形状的分块矩阵。

