5.3 超松弛迭代法

5.3.1 超迭代法的构造

5.3.2 超迭代法的收敛性

5.3.1 超松弛迭代法的构造

在很多情况小，J法和GS法收敛较慢，所以考虑GS法的改进。设计算第$k+1$个近似解 $x^{(k+1)}$时，分量$x_1^{(k+1)},x_2^{(k+2)},\cdots,x_{i-1}^{(k+1)}$已经算好。按GS法给出辅助量

$$\bar{x}_i^{(k+1)}=\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)\Big/a_{ii}$$

再用参数ω将 $x_i^{(k)}$与 $\bar{x}_i^{(k+1)}$做加权平均，即

$$x_i^{(k+1)}=\omega\bar{x}_i^{(k+1)}+(1-\omega)x_i^{(k)}=x_i^{(k)}+\omega(\bar{x}_i^{(k+1)}-x_i^{(k)})$$

经整理得

$$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\omega(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii}$$

$$i=1,2,\cdots,n, \qquad (5.3.1)$$

称此式为逐次超松弛迭代法，简记为**SOR(Successive Over – Relaxation)**法，其中ω称为超松弛因子。当$\omega=1$ 时，(5. 3.1)就是GS法。

记A=D－L－U，(5. 3. 1)可写成矩阵形式

$$x^{(k+1)}=(1-\omega)x^{(k)}+\omega D^{-1}\left(b+Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)}\right)$$

再整理得

$$x^{(k+1)}=L_{\omega}x^{(k)}+\omega(D-\omega L)^{-1}b \tag{5.3.2}$$

其中，迭代矩阵为

$$L_{\omega}=(D-\omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D+\omega U\right] \tag{5.3.3}$$

例5.4　　方程组

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{pmatrix}$$

得准确解为 $(3,4,-5)^T$，如果用 $\omega=1$ **SOR**跌代法（即**GS**法），计算公式是

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.75\,x_2^{(k)} + 6 \\ x_2^{(k+1)} = -0.75\,x^{(k+1)} + 0.25\,x_3^{(k)} + 7.5 \\ x^{(k+1)} = 0.25\,x_2^{(k+1)} - 6 \end{cases}$$

如果用 $\omega=1.25$ 的**SOR**迭代法，计算公式是

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.25\,x_1^{(k)} - 0.9375\,x_2^{(k)} + 7.5 \\ x_2^{(k+1)} = -0.9375\,x_1^{(k+1)} - 0.25\,x_2^{(k)} + 0.3125\,x_3^{(k)} + 9.375 \\ x_3^{(k+1)} = 0.3125\,x_2^{(k+1)} - 0.25\,x_3^{(k)} - 7.5 \end{cases}$$

取 $x^{(0)}=(1,1,1)^T$，迭代7次，则 $\omega=1$ 时得

$$x^{(7)}=(3.0134110,3.9888241,-5.0027940)^T$$

$\omega=1.25$ 时得

$$x^{(7)}=(3.0000498,4.0002586,-5.0003486)^T$$

若继续算下去，要达到7位数字的精度，$\omega=1$ 时，要迭代34次，而 $\omega=1.25$ 时，只需要迭代14次，显然选 $\omega=1.25$ 收敛要快些。

5. 3. 2 超松弛迭代法的收敛性

按一般的迭代法收敛的理论，**SOR**迭代法收敛的充分必要条件是 $\rho(L_\omega)<1$ 而 $\rho(L_\omega)$ 与松弛因子 ω 有关。下面讨论松弛因子 ω 在什么范围内取值，**SOR**迭代法可能收敛。

定理5.7 如果解方程组 $Ax=b$ 的**SOR**法收敛，则有 $0<\omega<2$。

证 设 L_ω 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

$$\det(L_\omega)=\det(D-\omega L)^{-1}\det[(1-\omega)D+\omega U]$$

$$=\det D^{-1}\det[(1-\omega)D]=(1-\omega)^n$$

由于**SOR**法收敛，所以有

$$|1-\omega| = |\det(L_\omega)|^{\frac{1}{n}} = |\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n|^{\frac{1}{n}} \le \rho(L_\omega) < 1$$

定理得证。

该定理说明，只有当松弛因子ω在区间$(0,2)$内取值时，**SOR**法才可能收敛

下面给出**SOR**法收敛的充分条件。

定理5. 8 如果**A**为对称正定矩阵，且$0<\omega<2$，则解$Ax=b$的**SOR**法收敛。

证　设λ是L_ω的一个特征值，对应特征向量x。由（**5. 3. 3**）可得

$$[(1-\omega)D+\omega U]x = \lambda(D-\omega L)x$$

这里，$A=D-L-U$是实对称矩阵，所以有$L^T=U$。上式两边与x作内积得

$$(1-\omega)(Dx,x)+\omega(Ux,x) = \lambda[(Dx,x)-\omega(Lx,x)] \qquad \textbf{(5. 3. 4)}$$

因为**A**正定，**D**亦正定，记$p=(Dx,x)$，有$p>0$。又记$(Lx,x)=\alpha+i\beta$，则有

$$(Ux,x)=(x,Lx)=\overline{(Lx,x)}=\alpha-i\beta$$

由（5.3.4）有

$$\lambda=\frac{(1-\omega)p+\omega\alpha-i\omega\beta}{p-\omega\alpha-i\omega\beta}$$

$$|\lambda|^2=\frac{[p-\omega(p-\alpha)]^2+\omega^2\beta^2}{(p-\omega\alpha)^2+\omega^2\beta^2}$$

因**A**正定,$(Ax,x)=p-2\alpha>0$,$0<\omega<2$，所以 $[p-\omega(p-\alpha)]^2-(p-\omega\alpha)^2=p\omega(2-\omega)(2\alpha-p)<0$ 即$|\lambda|^2<1$，从而 $\rho(L_\omega)<1$ ，**SOR**方法收敛。定理得证。

当$\omega=1$时，**SOR**法就是**GS**法，所以上面的定理说明，当系数矩阵是对称正定矩阵时，**GS**法收敛。

对于例**5.4**所给出的方程组，其系数矩阵是对称正定的，因此对 $\omega=1$ 和 $\omega=1.25$ 的**SOR**迭代法都收敛。

例5.5　设矩阵A非奇异，求证用GS法求解方程组$A^T Ax = b$时是收敛的。

证　对$x \neq 0$，由A非奇异知 $Ax \neq 0$，从而

$$(Ax, Ax) = (Ax)^T (Ax) = x^T A^T Ax > 0$$

即 $A^T A$ 是对称正定的，因此，用GS法求解方程组$A^T Ax = b$是收敛。

引入超松弛迭代法的想法是希望能找到最优的松弛因子 ω_{opt} ，使对应 ω_{opt} 的SOR方法受凉最快。对于一类有特殊性质的矩阵（即所谓2 –循环的和相容次序的矩阵，它们常在偏微分方程的数值解法中出现），有关ω_{opt}的理论在50年代已得到。因为证明较复杂，这里只叙述其结果，即

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - u^2}}$$

其中$\mu = \rho(B_J)$是 J 法迭代矩阵B_J 的谱半径。

可以证明，对称正定的三对角矩阵满足最优松弛因子ω_{opt}的条件。在实际应用中，一般地说计算 $\rho(B_J)$较困难。对某些微分方程数值解问题，可以考虑用求特征值的近似值的方法，也可以由计算实践摸索出近似最佳松弛因子。