5.1 基本迭代方法

5.1.1 迭代公式的构造

5.1.2 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel迭代法

第五章　线性方程组的迭代解法

教学目的

1. 掌握*Jacobi*迭代法，*G-S*迭代法解大型线性方程组的方法及其收敛性的判别方法；
2. 掌握*SOR*迭代法及收敛的必要条件($0< \omega<2$)；
3. 了解三种迭代法之间的改进关系从而掌握该思想方法；
4. 理解迭代法基本定理。

教学重点及难点

重点是三种迭代法及收敛性的判别方法；

难点是迭代法基本定理及三种迭代法收敛定理的证明。

第5章 线性方程组的迭代解法

首先看一个形成大型方程组的例子。考虑下面的**Poisson**方程

$$u_{xx}+u_{xx}=0,0\le x\le 1,0\le y\le 1,$$

的离散逼近，其边界条件为：

$$u(0,y)=y^2,u(1,y)=1,0<y<1,$$
$$u(x,0)=x^2,u(x,1)=1,0<x<1.$$

取$\Delta x=\Delta y=0.25$ 进行网格剖分,用二阶导数,按逐行自左至右和自下而上的自然次序离散华可得下列线性方程组

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & -1 & & & & \\ & -1 & 4 & & & -1 & & & \\ -1 & & & 4 & -1 & & -1 & & \\ & -1 & & -1 & 4 & -1 & & -1 & \\ & & -1 & & -1 & 4 & & & -1 \\ & & & -1 & & & 4 & -1 & \\ & & & & -1 & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & -1 & & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.25 \\ 1.5625 \\ 0.25 \\ 0 \\ 1 \\ 1.5625 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

其中 $u_{i+3\,j-3}(i,\ j=1,2,3)$ 是 $u(i\Delta x,\ j\Delta y)$ 的近似值。这是一种特殊形状的稀疏矩阵。随着Δx 和Δy 的减少，所得到的方程组的阶数将增大。

对于大型线形代数方程组，常用迭代解法。它是从某些初始向量出

发，用设计好的步骤逐次算出近似解向量 $x^{(k)}$，从而得到向量序 列 $\{x^{(k)}\}$。一般 $x^{(k+1)}$ 的计算公式是

$$x^{(k+1)} = F_k(x^{(k)}, x^{(k-1)}, \cdots, x^{(k-m)}), k = 0,1,\cdots.$$

称之为多步迭代法. 若 $x^{(k+1)}$ 只与 $x^{(k)}$ 有关，且 F_k 是线性的，即

$$x^{(k+1)} = B_k x^{(k)} + f_k, k = 0,1\cdots,$$

其中 $B_k \in R^{(n\times n)}$，称为单步线性迭代法，B_k 称为迭代距阵。若 B_k 和 f_k 都与k 无关，即

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f, k = 0,1\cdots,$$

称为单步定常线性迭代法。本章主要讨论具有这种形式的各种迭代方法。

5.1 基本迭代方法

5.1.1 迭代公式的构造

设$A \in R^{n\times n}$, $b \in R^{n}$，A非奇异, $x \in R^{n}$ 满足方程组

$$Ax=b。 \quad （5.1.1）$$

如果能找到距阵 $B \in R^{n\times n}$，向量$f \in R^{n}$，使 $I-B$ 可逆，而且方程组

$$x=Bx+f \quad (5.1.2)$$

的唯一解就是方程组（5.1.1）的解，则可从（5.1.2）式构造一个定常的线性迭代公式

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f。 \quad （5.1.3）$$

给定初始向量 $x^{(0)} \in R^{n}$, 由(5.1.3)可以产生序列 $\{x^{k}\}$,若它有极限 x^{*}, 显然 x^{*}就是(5.1.1)和(5.1.2)的解。

定义 5.1 若对任意初始向量 $x^{(0)} \in R^n$，迭代公式（5.1.3）产生的序列 $\left\{x^{(k)}\right\}$ 都有

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*,$$

则称迭代法（5.1.3）是收敛的。

从（5.1.1）出发，可以由不同的途径得到各种不同的等价方程组（5.1.2），从而得到不同的迭代法（5.1.3）。例如，设A可以分解为 $A = M - N$，其中M非奇异，则由（5.1.1）可得

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b.$$

令 $B = M^{-1}Nx = M^{-1}b,$ 就可以得到（5.1.2）的形式。不同的分解方式 $A = M - N$，可的不同的 B 和 f，下面给出对应不同分解方式的常用迭代计算公式。

5.1.2 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel迭代法

1. Jacobi 迭代法

记 $A=(a_{ij})$， 可以把 **A** 分解为

$$A=D-L-U, \tag{5.1.4}$$

其中 $D=diag(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$,

$$L=-\begin{pmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, U=-\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

现设**D**非奇异，即 $a_{ii}\neq 0, i=1,2,\cdots,n$ 。方程组（**5.1.1**）等价于

$$x = D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b.$$

由此构造迭代公式：

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + f_J, k = 0,1,\cdots, \quad (5.1.5)$$

其中迭代距阵 B_J 和向量 f_J 为

$$B_J = D^{-1}(L+U) = I - D^{-1}A, \quad (5.1.6)$$

$$f_J = D^{-1}b. \quad (5.1.7)$$

称（**5.1.5**）为解（**5.1.1**）的**Jacobi** 迭代法，简称 **J** 法。

用 **J** 法计算向量序列 $\{x^{(k)}\}$，要用两组单元存放向量 $x^{(k)}$ 和 $x^{(k+1)}$ 。

迭代法可以写成分量形式

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}, i = 1,2,\cdots,n. \quad (5.1.8)$$

2. Gauss-Seidel 迭代法

在**J** 法中，计算 $x_i^{(k+1)}$ 时，分量 $x_1^{(k+1)},\cdots,x_{i-1}^{(k+1)}$ 已经算出，所以可考虑

对J 法进行修改。在每个分量计算出来之后，下一个分量的计算就利用最新的计算结果。这样，在整个迭代过程中只要使用一组单元存放迭代向量，其分量形式的计算结果为

$$x_i^{(k+1)}=(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ii}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii},i=1,2,\cdots,n. \quad \textbf{（5.1.9）}$$

这就是**Gauss-Seidel 迭代法**，简称 **GS 法**

将（**5.1.9**）写成距阵形式

$$x^{(k+1)}=D^{-1}(Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)}+b),$$

经整理有

$$x^{(k+1)}=B_{GS}x^{(k)}+f_{GS},k=0,1,\cdots, \quad \textbf{（5.1.10）}$$

其中迭代距阵 B_{GS} 和向量 f_{GS} 为

$$B_{GS}=(D-L)^{-1}U, \quad \textbf{(5.1.11)}$$

$$f_{GS} = (D-L)^{-1}b. \qquad \textbf{(5.1.12)}$$

Jacobi 迭代法和 **Gauss-Seidel** 迭代法的分量形式供计算编程用，它们的距阵形式供研究迭代序列是否收敛等理论分析用。

例 5.1　用 J 法和 G S 法分别求解方程组

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix},$$

其准确解为 $x^* = (1,1,1)^T$。

解　用 **J** 法计算，按（**5.1.8**）有

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (\qquad -3x_2^{(k)} - x_3^{(k)} + 14)/10, \\ x_2^{(k+1)} = (2x_1^{(k)} \qquad + 3x_3^{(k)} + 5)/10, \\ x_3^{(k+1)} = (-x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)} \qquad + 14)/10. \end{cases}$$

用 **GS** 法计算，按（**5.1.9**）有

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (\quad -3x_2^{(k)} - x_3^{(k)} + 14)/10, \\ x_2^{(k+1)} = (2x_1^{(k+1)} \quad + 3x_3^{(k)} + 5)/10, \\ x_3^{(k+1)} = (-x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)} \quad + 14)/10. \end{cases}$$

取 $x^{(0)} = (0,0,0)^T$，**J** 法迭代**4**次的计算结果是

$$x^{(4)} = (0.9906, 0.9645, 0.9906)^T, \left\| x^{(4)} - x^* \right\|_\infty = 0.0356.$$

GS 法迭代**4**次的计算结果是

$$x^{(4)} = (0.99154, 0.99578, 1.0021)^T, \left\| x^{(4)} - x^* \right\|_\infty = 0.0085.$$

从计算结果看，本例用 **GS** 法显然比用 **J** 法收敛快。