习题5

5.1　给定方程组

$$（1）\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$（2）\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}。$$

试证明：方程组（1），J 法收敛而GS法不收敛，对方程组（2），J 法不收敛而GS法收敛。

5.2 设方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

其中 $a_{11}a_{22} \neq 0$。求 **J** 法收敛的充要条件。

5.3 给定方程组

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 2 & 10 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}。$$

试判别 **J** 法和**GS**法的收敛性。弱收敛，取初始迭代向量 $x^{(0)} = (0,0,0)^T$，求满足 $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_\infty < 10^{-3}$ 的解。

5.4 证明矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

对于$-0.5<a<1$是正定的，而 J 法只对 $-0.5<a<0.5$ 是收敛的。

5.5 给定迭代过程 $x^{(k+1)}=Cx^{(k)}+g$，其中$C\in R^{n\times n}$，$k=0,1,\cdots$。试证明：如果矩阵C的特征值 $\lambda_i(C)=0(i=1,2,\cdots,n)$，则此迭代过程最多迭代 **n**次就收敛于方程组的解。

5.6 用**SOR**法解方程组（取$\omega=0.9$）

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3=-12, \\ -x_1+4x_2+2x_3=20, \\ 2x_1-3x_2+10x_3=3。\end{cases}$$

要求当 $\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|_\infty<10^{-4}$ 时迭代终止。

5.7 用**SOR**法解方程组（分别取松弛因子$\omega=1.03$， $\omega=1$， $\omega=1.1$）

$$\begin{cases} 4x_1-x_2=1, \\ -x_1+4x_2-x_3=4, \\ -x_2+4x_3=-3。\end{cases}$$

要求 $\|x^* - x^{(k)}\|_\infty < 0.5\times 10^{-5}$，对每一个 ω 确定迭代次数。

5.8 设有方程组 $Ax=b$，A 为对称正定阵，其特征值 $\lambda(A)\le\beta$。证明迭代公式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(b - Ax^{(k)}),\quad k=0,1,\cdots,$$

当 $0<\omega<2/\beta$ 时收敛。

5.9 设A与B为n阶矩阵，A非奇异。考虑方程组

$$Az_1 + Bz_2 = b_1,\quad Bz_1 + Az_2 = b_2,$$

其中 $z_1, z_2, b_1, b_2 \in R^n$。

(1) 找出下述迭代方法收敛的充要条件。

$$Az_1^{(m+1)} = b_1 - Bz_2^{(m)},\quad Az_2^{(m+1)} = b_2 - Bz_1^{(m)},\quad m=0,1,\cdots。$$

(2) 找出下述迭代法收敛的充要条件。

$$Az_1^{(m+1)} = b_1 - Bz_2^{(m+1)},\quad Az_2^{(m+1)} = b_2 - Bz_1^{(m+1)},\quad m=0,1,\cdots。$$

5. 10　用块Gauss-Seidel迭代法求解方程组 $Ax=b$ 其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}。$$

取初始迭代向量 $x^{(0)}=b$，直到 $\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|_{\infty}<10^{3}$。