



数值试验题4

4.1 设方程组 $Ax=b$ ，其中

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 \times 10^{-15} & 59.14 & 3 & 1 \\ 5.291 & -6.13 & -1 & 2 \\ 11.2 & 9 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 59.17 \\ 46.78 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

分别用不选主元素的三角分解法和列选主元的三角分解法解方程组并比较计算结果。

4.2 设方程组 $Ax=b$ ，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^5 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_5 & x_5^2 & \cdots & x_5^5 \end{pmatrix}$$





$x_k = 1 + 0.1k, k = 0, 1, \dots, 5$, \mathbf{b} 由相应的矩阵元素计算, 使解向量
 $\mathbf{x} = (1, 1, \dots, 1)^T$

(1) \mathbf{A} 不变, 对 \mathbf{b} 的元素 b_6 加一个扰动 10^{-4} , 应用数学软件求解方程组。

(2) \mathbf{b} 不变, 对 \mathbf{A} 的元素 a_{22} 和 a_{66} 分别加一个扰动 10^{-6} , 应用数学软件求解方程组。

(3) 对上述两种扰动方程组的解做误差分析。

4.3 给定两个不同的方程组, 第一个方程组的系数矩阵为著名的**10阶Hilbert矩阵** \mathbf{H}_{10} , 右端项 $\mathbf{b} = (1, 0, \dots, 0)^T$, 且有

$$\|\mathbf{H}_{10}\|_1 = 2.93, \quad \|\mathbf{H}_{10}^{-1}\|_1 = 1.21 \times 10^{13}$$

第二个方程组是下一个三角方程组, 其系数矩阵为**4阶Wilkinson矩阵**:





$$A = \begin{pmatrix} 0.9143 \times 10^{-4} & & & \\ 0.8762 & 0.7156 \times 10^{-4} & & \\ 0.7943 & 0.8143 & 0.9504 \times 10^{-4} & \\ 0.8017 & 0.6123 & 0.7165 & 0.7123 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

右端项 $\mathbf{b} = (0.00009143, 0.87627156, 1.60869504, 2.13057123)^\top$ ，
准确解为 $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)^\top$ ，且有 $\|A_1\|_1 = 2.13$ ， $\|A^{-1}\|_1 = 1.51 \times 10^{16}$

(1) 对上面提供两个方程组，用你掌握的解法求出计算解 $\tilde{\mathbf{x}}$ 并计算剩余向量。

(2) 对上面两个方程组右端产生的 10^{-7} 扰动后，分别解方程组；再对系数矩阵和右端项都产生的 10^{-7} 扰动，再分别解方程组。观察产生的误差变化情况。





4.4 给定n阶方程组 $Ax=b$ ，其中

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & & & & \\ 8 & 6 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 8 & 6 & 1 & \\ & & & 8 & 6 & \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 7 \\ 15 \\ \vdots \\ 15 \\ 14 \end{bmatrix}$$

则方程组有解 $x = (1,1,\dots,1)^T$.

(1) 对 $n=10$ 和 $n=84$ ，分别用Gauss消去法和列主元素消去法解方程组，并计算比较结果。

(2) 试估计矩阵A的条件数。

