习题4

4.1 用**Gauss**削去法和**Doolittle**分解法求解

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4.2 用**Gauss**消去法和**Gauss**列主元消去求解

$$\begin{pmatrix} 0.729 & 0.81 & 0.9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1.331 & 1.21 & 1.1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6867 \\ 0.8338 \\ 1.000 \end{pmatrix}.$$

计算过程取**4**位有效数字，并同精确解（**0.2245,0.2814,0.3279**）^{T}比较

4.3 设**A=**（a_{ij}）$_{n*n}$，$a_{11}\neq 0$进一步**Gauss**消去法得到

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

试证明：

（1）若A对称，则A_2对称。

（2）若A对称正定，则A_2对称正定。

（3）若A严格对角占优，即 $|a_{ii}| > \sum_{j\neq 1}|a_{ij}|, i = 1,2,\cdots n,$

则A_2严格对角占优。

4.4 设A=（a_{ij}）$_{n*n}$，是对称正定矩阵经k-1步一步Gauss消去后约化为A（k）$=(a_{ij}^{(k)})$

证明：

（1）a_{ii} >0,vi=1,2,…n

(2)A的绝对值最大的元素必在对角线上。

（3） $a_{ii}^{(2)} \leq a_{ii}, i = 1,2,\cdots n$

（4） $\max\limits_{1\leq ij\leq n}|a_{ij}^{(k)}| \leq \max\limits_{1\leq ij\leq n}|a_{ij}|, k = 2,3,\cdots n$

4.5 设$A\in R^{n\times n}$，其第k列（$a_{1k}, a_{2k},\ldots, a_{nk}$）^{T}，$a_{kk}\neq 0$，其他各列依次为单位向量$e_1,\ldots, e_{k-1}, e_{k+1},\ldots, e_n$。试证$A^{-1}$的第k列为

$$-\frac{1}{a_{kk}}(a_{1k},\cdots a_{k-1,k},-1,a_{k+1,k},a_{nk})^T$$

其他各列与A各列相同

4.6 下列矩阵能否做Doolittle分解？若能分解分解式是否唯一？

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&1\\4&6&7\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&1\\3&3&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&2&6\\2&5&15\\6&15&46\end{pmatrix}$$

4.7 用追赶法求解

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&&&\\-1&2&-1&&\\&-1&2&-1&\\&&-1&2&-1\\&&&-1&2\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

4.8 用平方根法求解

$$\begin{pmatrix} 15 & -4 & -2 \\ -4 & 10 & 3 \\ -2 & 3 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

4.9 用改进的平方根法求解

$$\begin{pmatrix} 15 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

4.10 计算$\mathbf{cond}_2$（**A**）和 $cond_{\infty}(A)$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{pmatrix}$$

4.11 证明：如果是正交阵**A**，则 $\mathrm{cond}_2(\mathrm{A}) = 1$ 。

4.12 设**A**，**B**$\in \mathbf{R}^{n\times n}$，对矩阵的算子范数，证明

cond（AB） $\leq$ **cond（A） cond（A）**

4.13 设方程组**Ax=b**，其中

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1.0001 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} -1 \\ 1.0001 \end{pmatrix}$$

当右端向量**b**有误差 $\delta b = (0,.0001)^T$ 时，引起解向量**x**的误差为δx ，试求出 $\|\delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$ 的上界，并分析这个结果。

4.14 设方程组**Ax=b**，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{pmatrix}$$

其精确解（**1**，**1**）^{T}为给**A**一个扰动

$$\delta A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.00002 & 0 \end{pmatrix}$$

引起 解的变化为 δx。试求出 $\|\delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$ 的上界

4.15 设A为非奇异矩阵，并且$\|A\|\|\delta A\|<1$ 。试证$(A+\delta A)^{-1}$存在，且有

$$\frac{\left\|A^{-1}-(A+\delta A)^{-1}\right\|}{\left\|A^{-1}\right\|} \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\|\|\delta A\|}{1-\left\|A^{-1}\right\|\|\delta A\|}$$

4.16 设A是非奇异矩阵，B是奇异矩阵。求证，对于算子范数有

$$\|A\| \leq\|A-B\| \operatorname{cond}(A)$$