3.4 Gauss求积公式

3.4.1 Gauss求积公式的基本理论

3.4.2 常用Gauss求积公式

3.4.3 Gauss求积公式的余项与稳定性

3.4 Gauss求积公式

学习目标:

掌握高斯求积公式的用法。

会用高斯—勒让德求积公式。

3.4 Gauss求积公式

3.4.1 Gauss求积公式的基本理论

在Newton-Cotes求积公式中,节点是等距的,从而限制了求积公式的代数精度.下面的讨论将取消这个限制条件,使求积公式的代数精度尽可能高.首先以简单情形论证这样做是可行的,然后给出概念和一般理论。

例3.5 确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精度尽量高。

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

解 按代数精度的概念，分别令 $f(x)=1, x, x^2, x^3$ 时

上式左边与右边分别相等，有

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 &= 2, \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 &= 0, \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 &= \frac{2}{3}, \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 &= 0. \end{aligned}$$

有第二式和第四式可得 $x_0^2 = x_1^2$，结合第一式和第三式得 $x_0^2 = x_1^2 = \frac{1}{3}$.

取 $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 得 $A_0 = A_1 = 1$

于是得到求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

它有**3**次代数精度，而以两个端点为节点的梯形公式只有**1**次代数精度。

一般地，考虑带权求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \qquad \textbf{(3.4.1)}$$

其中 $x_k, A_k (k=0,1,\cdots,n)$ 为**2n+2**个待定参数，适当选择这些参数，有可能使求积公式具有**2n+1**次代数精度。

定义3.3 如果求积公式（**3.4.1**）具有**2n+1**次代数精度，则称该公式**Gauss型公式**。称 $x_k (k=0,1,\cdots n)$ 其节点为**Gauss点**。

如果象例3.5那样，直接利用代数精度的概念去求n=1个Gauss点和n+1个求积系数，则要联立2n+2个非线性方程组。方程组是可解的，但当n稍大时，解析的求解就很难，数值求解非线性方程组也不容易。下面从分析Gauss点的特性着手研究Gauss公式的构造问题 。

定理 3.5 对于插值求值公式(3.4.1),其节点 $x_k\ (k=0,1,\cdots,n)$ 是Gauss点的充分必要条件是多项式 $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ 与任意不超过n次多项式 P(x)带权正交,即 $\int_a^b \rho(x)P(x)\omega_{n+1}(x)dx=0$ （3.4.2）

证. 先证必要性.设P(x)是任意次数不超过n的多项式,则 $P(x)\omega_{n+1}(x)$ 的次数不超过 **2n+1**。因此,如果 $x_0, x_1, \cdots x_n$ 是Gauss点，则求积公式（**3.4.1**）对于 $P(x)\omega_{n+1}(x)$是准确成立的，即有

$$\int_a^b \rho(x)P(x)\omega_{n+1}(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k P(x_k)\omega_{n+1}(x_k)$$

但 $\omega_{n+1}(x_k) = 0, (k = 0,1,2\cdots n)$ 故（**3.4.2**）成立。

再证充分性。设f(x)是任意个次数不超过2n+1的多项式，用 $\omega_{n+1}(x)$ 除f（x），记商为P（x），余式为Q(x)，即 $f(x) = P(x)\omega_{n+1}(x) + Q(x)$

其中P(x)和Q(x)都是次数不超过n的多项式。利用（**3.4.2**）有

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \int_a^b \rho(x)Q(x)dx$$

由于（**3.4.1**）是插值型的，它对于Q(x)能准确立即

$$\int_a^b \rho(x)Q(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k Q(x_k)$$

注意到 $\omega_{n+1}(x_k)=0$ 知 $Q(x_k)=f(x_k)$，从而有

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

由此可见，公式（**3.4.1**）对于一切次数不超过**2n+1**

的多项式均能准确成立。因此，$x_k\ (k=0,1,\cdots n)$

是**Gauss**点，定理得证。

由于**n+1**次正交多项式与比它次数低的任意多项式正交，并且**n+1**次

正交多项式恰好有**n+1**各互异的实的单根，我们有下面的推论。

推论 n+1次正交多项式的零点是n+1点Gauss公式的Gauss点。利用正交多项式得出Guass点 $x_0, x_1, \cdots x_n$

后，利用插值原理可得Gauss公式的求积系数为

$$A_k = \int_a^b \rho(x) l_k(x) dx, k = 0,1,\cdots n$$

其中 $l_k(x)$ 是关于Gauss点的Lagrange插值基函数。

例 3.6 确定 x_0, x_1, A_0, A_1 使下列公式为Gauss公式：

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\, f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

解 我们可以像例3.5一样,直接由代数精度的概念构造Gauss公式。

这里,我们用正交多项式的零点作为Gauss点的办法构造该Gauss公式。

先构造区间[0，1]上权函数 $\rho(x) = \sqrt{1-x}$ 的正交多项式 $\{\varphi_j(x)\}$, 这里我们直接用正交性求解。设

$$\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x+a,\varphi_2(x)=x^2+bx+c$$

则由 $(\varphi_0,\varphi_1)=\int_0^1\sqrt{1-x}(x+a)dx=0$

得a=-2/5.由 $(\varphi_{0,}\varphi_2)=\int_0^1\sqrt{1-x}(x^2+bx+c)dx=0$

得 $\frac{2}{5}b+c+\frac{8}{35}=0$ ，由 $(\varphi_1,\varphi_2)=\int_0^1\sqrt{1-x}\left(x-\frac{2}{5}\right)(x^2+bx+c)dx=0$

得**b=-8/9**，从而得**c=-8/63**。由 $\varphi_2(x)=0$ 的零点 $x_0=0.1788, x_1=0.7101$

按代数精度的概念，分别令**f(x)=1**，**x**时公式准确成立，得

$$\begin{cases} A_0+A_1=\frac{2}{3}, \\ 0.1788A_0+0.7101A_1=\frac{4}{15}. \end{cases}$$

由此解得 $A_0=0.3891, A_1=0.2776$ 从而得到**Gauss**求积公式。

$$\int_0^1\sqrt{1-x}f(x)dx\approx 0.3891f(0.1788)+0.2776f(0.7101)$$

3.4.2 常用Gauss求积公式

1.Gauss—Legendre求积公式

在区间**[-1，1]**上取权函数 $\rho(x)=1,$ ，那么相应的正交多项式为**Legendre**多项式。以**Legendre**多项式的零点为**Gauss**点的求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \qquad (3.4.3)$$

称之为**Gauss-Legendre求积公式**。

当**n=1**时，二次**Legendre**多项式 $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$,

零点为$x_0=-\frac{1}{\sqrt{3}},x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$。此时，公式（**3.4.3**）即为例**3.5**所给出的公式。

当**n=2**时，三次**Legendre**多项式 $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^2-3x)$,

零点为 $x_0=-\frac{\sqrt{15}}{5},x_1=0,x_2=\frac{\sqrt{15}}{5}$以此为**Gauss**点，仿两点**Gauss-Legendre**求积公式，求相应的求积系数，可构造出具有五次代数精度的**3**点**Gauss-Legendre**求积公式

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx\frac{5}{9}f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right).$$

Guass-Legendre求积公式中的**Gauss**点 x_k 和求积系数 A_k 见表**3-5**。

对于一般区间**[a，b]**上的求积，如果用**Gauss-Legendre**求积公式，那么

务必须作变量替换

$$x=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(b-a)t$$

使 $x\in[a,b]$ 时，$t\in[-1,1]$，并有

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left[\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)t\right]dt$$

对于上式右边的积分可以应用**Guss-Legendre**求积公式。

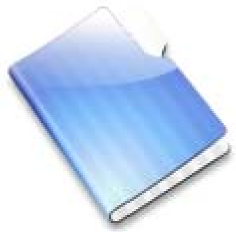


表3-5

N	x_k	A_k
0	0	2
1	± 0.5773502692	1
2	± 0.7745966692	0.5555555555
	0	0.8888888888
3	± 0.8611363116	0.3478548451
	± 0.3399810436	0.6521451459
4	± 0.9061798459	0.2369268851
	± 0.5384693101	0.4786286705
5	0	0.5688888889

例3.7 用Gauss-Legendre求积公式(n=1,2)计算积分 $I=\int_0^1 x^2e^x dx$

解 由于区间为[0,1],所以先作变量替换x=(1+t)/2,得

$$I=\int_0^1 x^2e^x dx=\frac{1}{8}\int_{-1}^{1}(t+1)^2 e^{(1+t)/2}dt$$

令 $f(t)=(1+t)^2e^{(1+t)/2}$ 对于n=1,由两点Gauss-Legendre公式有

$$I\approx\frac{1}{8}\left[f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]=0.71194774$$

对于n=2,由三点Gauss-Legendre公式有

$$I\approx\frac{1}{8}\left[\frac{5}{9}f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right]=0.718251799$$

容易求出定积分的精确值为 I=e-2=0.718281828，由此可见,n=1时的实际误差为0.0063340054，n=2时的实际误差为0.000030049。

2.Guass-Chebyshev求积公式

在区间**[-1,1]**上取权函数 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的正交多项式是**Chebyshev**正交多项式。**n+1**次**Chebyshev**多项式

$$T_{n+1}(x)=\cos[(n+1)\arccos x]$$

的零点为

$$x_k=\cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi, k=0,1,\cdots,n.$$

以此为**Gauss**点,利用**Chebyshev**多项式的性质可得相应的求积系数 为

$$A_k=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}l_k(x)dx=\frac{\pi}{n+1}, k=0,1,\cdots n.$$

其中 $l_k(x)$ 是关于**Gauss**点的**Lagrange**插值基函数.从而有**Gauss-Chebyshev**求积公式

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx \approx \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(x_k), \qquad \textbf{(3.4.4)}$$

对于**n=1,**二点**Gauss-Chebyshev**求积公式为

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx \approx \frac{\pi}{2}\left[f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

对于**n=2,**三点**Gauss-Chebyshev**求积公式为

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx \approx \frac{\pi}{3}\left[f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right],$$

例3.8 计算积分 $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{2+x}{1-x^2}}\,dx$

解 选用**n=2**的**Gauss-Chebyshev**求积公式计算,这时$f(x)=\sqrt{2+x}$
于是有

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{2+x}{1-x^2}}\,dx \approx \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{2-\frac{\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{2} + \sqrt{2+\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = 4.368939556$$

3.4.3 Gauss求积公式的余项与稳定性

定理 3.6 设 $f(x)\in C^{2n+2}[a,b]$,则**Guass**公式**(3.4.1)**的余项是

$$R_G=\int_a^b\rho(x)f(x)dx-\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$$

$$=\frac{1}{(2n+2)!}f^{(2n+1)}(\eta)\int_a^b\rho(x)\omega_{n+1}^2(x)dx,\eta\in(a,b)\qquad\textbf{(3.4.5)}$$

证 由**Gauss**点 $x_k(k=0,1,\cdots n)$ 构造次数不超过**2n+1**的**Hermite**插值

多项式**H(x)**,满足条件 $H(x_k)=f(x_k),H'(x_k)=f'(x_k),k=0,1,\cdots n.$

由于**Gauss**公式具有**2n+1**次代数精度它对于**H(x)**能准确成立,即

$$\int_a^b p(x)H(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k H(x_k) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

由Hermite插值多项式的插值余项有

$$R_G = \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \sum_{k=0}^{n} A_k H(x_k)$$

$$= \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \int_a^b \rho(x) H(x) dx$$

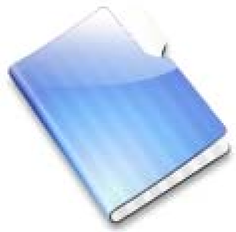
$$= \int_a^b \rho(x) \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \omega_{n+1}^2(x) dx$$

在考虑到 $\omega_{n+1}^2(x)$ 在[a,b]上保号,应用积分中值定理得(3.4.5),定理得证.

对于两点Gauss-Legendre求积公式有

$$R_{G-L} = \frac{f^4(\eta)}{4!} \int_{-1}^{1} \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 dx$$

$$= \frac{f^4(\eta)}{135}, \eta \in (-1,1).$$



对于两点**Gauss-Chebyshev**求积公式有

$$R_{G-C}=\frac{f^{4}(\eta)}{4!}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}dx$$

$$=\frac{\pi f^{4}(\eta)}{192},\eta\in(-1,1).$$

对比**Newton-Cotes**求积公式,**Gauss**求积公式不但具有高精度,而且是数值稳定的.**Gauss**公式的稳定性之所以能够得到保证,是由于它的求积系数具有非负性.

引理 **Gauss**求积公式**(3.4.1)**中的系数 $A_k\ (k=0,1,\cdots n)$ 全部为正.

证 对于以**Gauss**点 $x_k\,(k=0,1,\cdots n)$ 为节点的插值基函数

$l_i(x)(i=0,1,\cdots n), l_i^2(x)$ 是**2n**次多项式,故**Gauss**公式**(3.4.1)**对于它能准确,

即有 $\int_a^b \rho(x) l_i^2(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k l_i^2(x_k) = A_i$

由于上式左端大于零,所以有 $A_i > 0(i=0,1,\cdots n)$

在实际计算积分的近似值 $I_n = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 时, $f(x_k)$ 不能精确地

取到，一般只能是近似值，设 $f^*(x_k) \approx f(x_k)(k=0,1,\cdots n)$ 实际求

得的积分值为 $I_n^* = \sum_{k=0}^{n} A_k f^*(x_k)$

定理 3.7 对于函数值的变化所引起的求积公式的误差有

$$\left|I_n^* - I_n\right| \le \max_{0\le k\le n} \left|f^*(x_k) - f(x_k)\right| \int_a^b \rho(x)dx$$

证 由于求积系数 $A_k > 0, k = 0, 1, \cdots, n$ 因此有

$$\left|I_n^* - I_n\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} A_k f^*(x_k) - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)\right| \le \sum_{k=0}^{n} A_k \left|f^*(x_k) - f(x_k)\right|$$

$$\le \max_{0 \le k \le n} \left|f^*(x_k) - f(x_k)\right| \sum_{k=0}^{n} A_k$$

在Gauss求积公式中，取**f(x)=1**，此时求积公式精确成立，即得

$$\int_a^b \rho(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k$$

因此，（**3.4.6**）成立，定理成立。

由定理**3.7**可知，数据误差对于求积公式计算值的影响是可以控制的，即

Gauss求积公式在数值计算中是稳定的。