3.3 外推原理与Romberg求积法

3.3.1 外推原理

3.3.2 Romberg 求积法

3.3 外推原理与Romberg求积法

学习目标:

理解外推原理，会运用Romberg求积法。

3.3 外推原理与Romberg求积法

3.3.1 外推原理

在科学与工程计算中，很多算法与步长*h*有关，特别是数值积分、数值微分和微分方程数值解的问题。对于这些算法，我们可以通过外推技巧提高计算精度。先看一个计算 π 的近似值的例子，由函数*sinx*的**Taylor**展开式有

$$n\sin\frac{\pi}{n}=\pi-\frac{\pi^3}{3!\,n^2}+\frac{\pi^5}{5!\,n^4}-\cdots.$$

若记 $h=\frac{\pi}{6}, F(h)=6\sin\frac{\pi}{6}$, 则有

$$F(h)=\pi-\frac{\pi}{6}h^2+\frac{\pi}{120}h^4-\cdots$$

$$F\left(\frac{h}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{6}\frac{1}{4}h^2+\frac{\pi}{120}\frac{1}{16}h^4-\cdots$$

由此构造新的表达式：

$$F_1(h)=\frac{4F\left(\frac{h}{2}\right)-F(h)}{3}=\pi-\frac{\pi}{120}\frac{1}{4}h^4+\cdots$$

可见，计算π的近似值的算法**F(h)**的截断误差是 $O(h^2)$ ，而算法 $F_1(h)$ 的截断误差是 $O(h^4)$ 。外推一次，精度提高了。这就是外推法的基本思想。若重复以上过程，不断外推，即不断折半步长**h**，得到计算π的算法序列 $\{F_k(h)\}$。随着**k**的增加，算法的截断误差越来越高，计算精度越来越好。

可将外推思想推广到一般情况。设**F(h)** 是计算**F(0)**的一种近似算式，

带截断误差的表示式为

$$F(h)=F(0)+a_p h^p+O(h^s), s>p,$$

其中，a_p 与**p**无关。

如果我们用**h**和**h/q**（**q>1**）两种步长分别计算**F(h)**和**(h/q)**，则有

$$F\left(\frac{h}{q}\right)=F(0)+a_p\left(\frac{h}{q}\right)^p+O(h^s),$$

消去截断误差的主项，得新的算法

$$F_1(h)=\frac{q^P F\left(h/q\right)-F(h)}{q^P-1}=F(0)+O(h^s),$$

我们称这个过程为**Richardson外推法**。这里，$F_1(h)$ 逼近**F(0)**的截断误差是 $O(h^s)$ 。

只要知道 **F(h)**的更加完整的关于**h**幂的展开式，而无需知道展开式中各个系数的具体数值，就能重复使用**Richardson** 外推法，直到截断误差达到容许误差。用归纳法可以证明下面更一般的定理。

定理 **3.4** 假设**F(h)**逼近**F(0)**的余项为

$$F(h)-F(0)=a_1h^{p_1}+a_2h^{p_2}+a_3h^{p_3}+\cdots,$$

其中，$p_1<p_2<p_3<\cdots, a_k(k=1,2,\cdots)$ 是与**h** 无关的非零常数，

则由

$$F_0(h)=F(h), F_{k+1}(h)=\frac{q^{p_k}F_k\left(h/q\right)-F_k(h)}{q^{p_k}-1}, k=0,1,\cdots \quad \textbf{（3.3.1）}$$

定义的序列$\{F_n(h)\}$ 有 $F_n(h)-F(0)=a_{n+1}^{(n)}h^{p_{n+1}}+a_{n+2}^{(n)}h^{p_{n+2}}+\cdots,$

其中 $a_{n+k}^{(n)}(k=1,2,\cdots)$ 与**h**无关，**q>1**。

Richardon外推法应用非常广泛和有效**,**下面应用于数值积分**.**

3.3.2 Romberg 求积法

先给出**Romberg**求积法的基础,即对于计算积分**I=I[f]**的复化梯形公式**T(h)**,其余项为

$$I-T[h]=\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(a)-f^{2k-1}(b)]h^{2k}+r_{m+1} \qquad \textbf{(3.3.2)}$$

其中, B_{2k} 为**Bernoulli常数** 。

$$r_{m+1}=-\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}(b-a)f^{(2m+2)}(\eta)h^{2m+2},\eta\in(a,b).$$

在外推算法（**3.3.1**）中，取 $q=2, p_k=2k,$ 由余项（**3.3.2**）可得著名的

Romberg求积方法：

$$
\begin{cases}
T_1^{(0)} = \dfrac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right], \\[2ex]
T_1^{(i)} = \dfrac{1}{2}T_1^{(i-1)} + \dfrac{b-a}{2^i}\displaystyle\sum_{j=1}^{2^{i-1}} f\left(a+\dfrac{2j-1}{2^i}(b-a)\right) = i = 1,2,\cdots, \\[2ex]
T_{m+1}^{(k-1)} = \dfrac{4^m T_m^{(k)} - T_m^{(k-1)}}{4^m - 1}, m = 1,2,\cdots, k = 1,2,\cdots i
\end{cases}
$$

其中，$T_1^{(i)}$ 表示将积分区间**[a,b]**作 2^i 等分相应的的复化梯形公式，求和项包括了每次等份后新增加点上的函数值 。$T_{m+1}^{(k)}$ 表示第**m**次外推所得的计算值。可以验证，**m=1**时，所得外推值就是复化**Simpson**公式的计算值。对给定的精确标准 ε ，我们可由

$$
\left|T_{(m)}^{(0)} - T_{m-1}^{(0)}\right| < \varepsilon \text{或} \left|\frac{T_m^{(0)} - T_{m-1}^{(0)}}{T_m^{(0)}}\right| < \varepsilon
$$

作为计算终止的标准。表**3-3**给出了计算过程，**i**表示第**i**步计算。

表3-3

k	T_1^k	T_2^k	T_3^k	T_4^k	T_5^k	
0	1 T_1^0	3 T_2^0	6 T_3^0	10 T_4^0	15 T_5^0	
1	2 T_1^1	5 T_2^1	9 T_3^1	14 T_4^1	⋮	
2	4 T_1^2	8 T_2^2	13 T_3^2	⋮		
3	7 T_1^3	12 T_2^3	⋮			
4	11 T_1^4	⋮				
⋮	⋮					

值得注意的是，若对某个k，被积函数有性质 $f^{(2k-1)}(a)=f^{(2k-1)}(b)$ 说明余项（3.3.2）中 h^{2k} 的系数为零，则对Romberg求积法要做相应的修改，否则外推结果可能会差些。

例3.4 用Romberg求积法计算定积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ ，使计算值的误差不超过 $\varepsilon=0.5\times10^{-6}$。

解

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}, T_1^{(0)}=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]=0.9207355.$$

$$T_1^{(1)}=\frac{1}{2}T_1^{(0)}+\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)=0.9397933, T_2^{0}=\frac{4}{3}T_1^{(1)}-\frac{1}{3}T_1^{(0)}=0.9461459,$$

$$T_1^{(2)}=\frac{1}{2}T_1^{(1)}+\frac{1}{4}\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]=0.9445135,$$

$$T_2^{(1)}=\frac{4}{3}T_1^{(2)}-\frac{1}{3}T_1^{(1)}=0.9460869,$$

$$T_3^{(0)}=\frac{16}{15}T_2^{(1)}-\frac{1}{15}T_2^{(0)}=0.9469830, \left|T_3^{(0)}-T_2^{0}\right|>0.5\times10^{-6}.$$

还没有满足精度要求，需继续进行外推，接着再计算 $T_1^{(3)}, T_2^{(2)}, T_3^{(1)}$ 和 $T_4^{(0)}$ 于是得到计算结果如表3-4。

由此看出，步长折半3次，复化梯形公式只达到2位有效数字，而经3次外推后达6位有效数字。

表3-4

k				
0	0.9207355	0.9461459	0.9460830	0.9460830
1	0.9397933	0.9460869	0.946.831	
2	0.9445135	0.9460833		
3	0.9456909			