3.2 复化求积公式

3.2.1 复化梯形求积公式

3.2.2复化simpson求积公式

对于定积分 $\int_1^{10}\frac{1}{x}dx$， 其精确值.I=2.302585。用梯形公式（3.1.6）计算有 $I_2=2.740909$ 用Simpson公式（3.1.7）计算 $I_1=4.95$. 可以看出，它们的误差很大。由上一节的讨论可知，高阶Newton-Cotes求积公式是不稳定的。

因此，通常不用高阶求积公式得到比较精确的积分值，而是将整个积分区间分段，在每一小段上用低阶求积公式。这种方法称为复化求积方法。本节讨论复化梯形公式和复化Simpson公式。

高次插值有Runge 现象，故采用分段低次插值

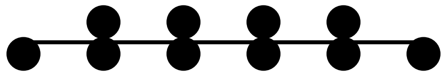
$\Rightarrow$ 分段低次合成的 *Newton-Cotes* 复合求积公式。

3.2 复化求积公式

一、复化梯形公式:

$$h=\frac{b-a}{n},\quad x_k=a+kh \quad (k=0,\dots,n)$$

在每个 $[x_{k-1}, x_k]$ 上用梯形公式:



$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{2}[f(x_{k-1})+f(x_k)],\quad k=1,\dots,n$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{k-1})+f(x_k)]$$

$$=\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$$

$$=T_n$$

称 T_n 为复化梯形公式

设 $f(x)\in C^2[a,b]$，由梯形公式的误差有

$$R_{T_n}=I-T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{h^3}{12}f''(\eta_k)\right),\eta_k\in[x_k,x_{k+1}].$$

因为

$$\min_{0\le k\le n-1} f''(\eta_k)\le\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f''(\eta_k)\le\max_{0\le k\le n-1} f''(\eta_k)$$

所以存在 $\eta\in[\eta_0,\eta_{n-1}]\subset[a,b]$ 使得

$$f''(\eta)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f''(\eta_k) \qquad \textbf{(3.2.2)}$$

于是,复化梯形公式的余项为

$$R_{T_n}=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta),\eta\in(a,b).$$

可以看出，误差（3.2.2）是h^2阶的。而且，当 $f(x)\in C^2[a,b]$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} R_{T_n}=0$，即复化梯形公式收敛到 $\int_a^b f(x)dx$. 值得指出的是，收敛的结论，只要f（x）在[a，b]上可积即可成立。

事实上，由定积分的定义可知，对[a，b]的任意分划 Δ 所作黎曼和的极限

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

存在。该积分对于等距分划和特殊的 当然成立，于是对复化梯形公式有

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} f(a+kh)h + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} f(a+(k+1)h)h\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx\right] = \int_a^b f(x)dx$$

定义3.2 如果一种公式 I_n有 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{I-I_n}{h^p}=c\neq 0$ 则称求积公式 I_n是P阶收敛的。

显然，复化梯形公式是2 阶收敛的。

用复化梯形求积公式时，如果 T_n不够精确，那么我们可以将每个子区间 $[x_k, x_{k+1}](k=0,1,\cdots n)$ 对分，得到**2n**个子区间，再用复化梯形公式计算。此时，计算 T_n 的分点也是计算 T_{2n} 的分点。

因此，我们可以将复化梯形公式递推化，即有

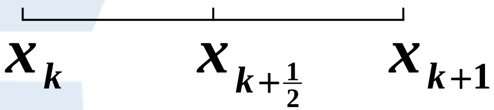
$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) \qquad \text{（3.2.3）}$$

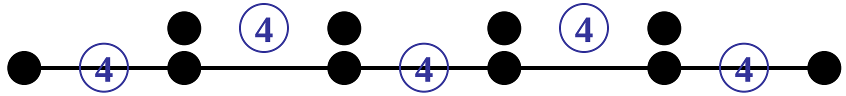
其中$x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \frac{1}{2}h$。这样，计算 T_{2n} 时，只须把新分点上的函数值算出加到 T_n 中即可。

3.2.2 复化simpson求积公式

将积分区间[a,b]为n等份，h=(b-a)/h, $x_k = a + kh, k = 0,1,\cdots n.$
在每个子区间 $[x_k, x_{k+1}]$上用 Simpson公式可得

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{6}[f(x_k) + 4f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})]$$





$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{6}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x) + 4f\left(x + \frac{1}{2}\right) + f(x_{k+1})\right]$$

称S_n为复化Simpson公式 。

$$= \frac{h}{6}[f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) + f(b)] = S_n \qquad (3.2.4)$$

设 $f(x) \in C^4[a,b]$ ，由**Simpson**公式的误差有

$$R_{S_n} = I - S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{1}{90}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f^{(4)}(\eta_k)\right], \quad \eta_k \in [x_k, x_{k+1}].$$

类似于复化梯形公式的推导，复化**Simpson**公式的余项为 （**3.2.5**）

$$R_{S_n} = -\frac{b-a}{2880} h^4 f^{(4)}(\eta), \eta \in (a,b).$$

由此可见，复化**Simpson**公式是**4**阶收敛的 。

例 3.3 分别用复化梯形公式和复化**Simpson**公式计算 $\int_0^{\pi} \sin x dx$ 时，要使用误差不超过 2×10^{-5}，问各取多少个节点？

解：由（**3.2.2**），令

$$|R_{T_n}| = \left| -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta) \right| \le \frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \max_{0\le x\le \pi} |\sin x| \le 2\times 10^{-5},$$

由此解得 $n^2 \ge \frac{\pi^3}{24} \times 10^5, n \ge 360$.

由（**3.2.5**），令

$$|R_{S_n}| = \left| -\frac{b-a}{2880} h^4 f^{(4)}(\eta) \right| \le \frac{\pi}{2880}\left(\frac{\pi}{n}\right)^4 \max_{0\le x\le \pi} |\sin x| \le 2\times 10^{-5},$$

由此解得 $n^4 \ge \frac{\pi^5}{5760} \times 10^5, n \ge 9$ 。因此，复化梯形公式取**361**个节点，复化**Simpson**公式取**19**（即**9**×**2+1**）个节点。可见，复化**Simpson**公式明显由于复化梯形公式。

例 3.4 计算 $\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$

运算量基本相同

解： $T_8 = \frac{1}{16}\left[f(0) + 2\sum_{k=1}^{7} f(x_k) + f(1) \right]$ 其中 $x_k = \frac{k}{8}$

$= 3.138988494$

$S_4 = \frac{1}{24}\left[f(0) + 4\sum_{\text{odd}} f(x_k) + 2\sum_{\text{even}} f(x_k) + f(1) \right]$ 其中 $x_k = \frac{k}{8}$

$= 3.141592502$

3.3 用样条函数方法和外推法求下列函数的一阶和二阶导数，并结合函数的图形说明精度与步长h的关系。

$$(1)\ f(x)=\frac{1}{16}x^6-\frac{3}{10}x^2, -2\le x\le 2,$$

$$(2)\ f(x)=e^{-x^2}\cos 20x, 0\le x\le 2。$$

3.4 设计自适应的Simpson方法求积分 $\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx\ (=0.4)$ 的近似值，即对不同的子区间分别按精度标准确定各自适当的步长，计算各子区间上的积分近似值，然后将各个近似值相加，要求近似值的绝对误差限为 0.5×10^{-7} 。