§3.1 Newton-Cotes求积公式

- 3.1.1 插值型求积法
- 3.1.2 Newton-Cotes求积公式
- 3.1.3 Newton-Cotes公式的误差分析
- 总结

第三章 数值积分和数值微分

学习目标:

理解求积公式及代数精度概念，掌握确定求积公式的代数精度的方法，掌握Newton-Cotes 求积公式、Romberg算法及Gauss求积公式的构造技术、特点及余项形式。掌握复化梯形求积公式、复化Simpson求积公式的构造技术及余项形式。了解上述求积公式的适用类型并会熟练使用这些公式做数值积分。了解数值微分法及 Richardson 加速技术，了解Newton-Cotes求积公式、Gauss 求积公式的稳定性问题。

前言

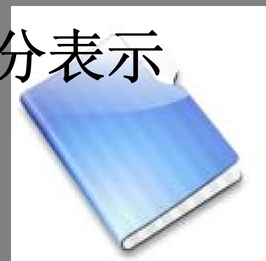
一、数值求积的基本思想

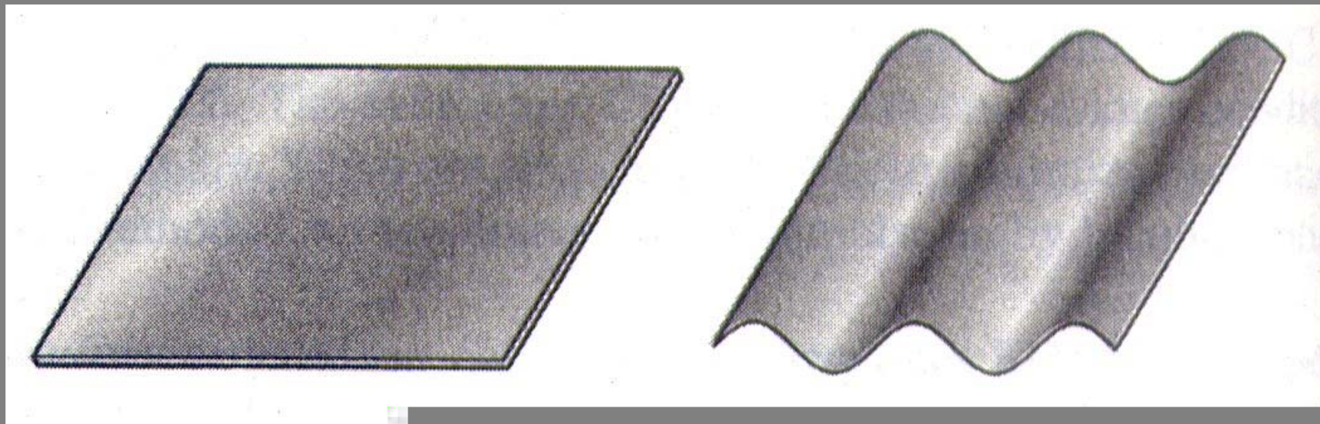
积分 $I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 只要找到被积函数 $f(x)$ 原函数 $F(x)$，便有牛顿—莱布尼兹(Newton—Leibniz)公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

实际困难：大量的被积函数（$\frac{\sin x}{x}$, $\sin x^2$ 等），找不到用初等函数表示的原函数；另外，$f(x)$是（测量或数值计算出的）一张数据表时，牛顿—莱布尼兹公式也不能直接运用。

- 例如，一块铝合金的横断面为正弦波，要求原材料铝合金板的长度。也就是$f(x)=\sin x$ 从$x=0$到$x=b$的曲线弧长L，可用积分表示为





$$L=\int_0^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int_0^b\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$$

- 这是一个椭圆积分计算问题。

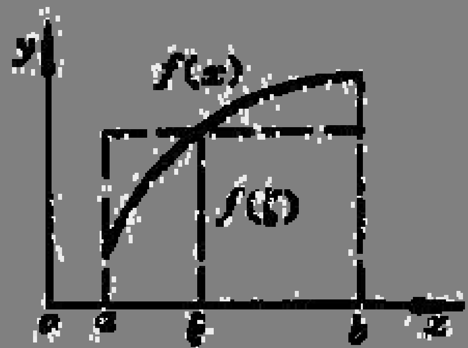
卫星轨道的计算也一个椭圆积分计算问题。找不到被积函数的原函数。然而，用数值分析中的数值积分方法计算，并不是很难的计算问题。

本章讨论常用的数值求积公式及它们的误差估计和代数精度，而对数值微分只作简单介绍。

积分中值定理：在[a, b]内存在一点 ξ，有

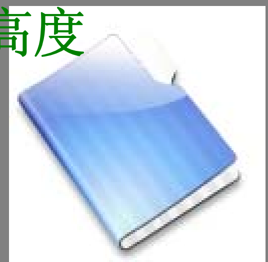
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\xi)$$

成立。



就是说, 底为$b-a$ 而高为$f(\xi)$的矩形面积恰等于所求曲边梯形的面积 .

问题 在于点ξ的具体位置一般是不知道的，因而 难以准确算出 $f(\xi)$的值. 我们将$f(\xi)$称为区间[a, b]上的平均高度. 这样,只要对平均高度$f(\xi)$提供一种算法，相应地便获得一种数值求积方法.



如果用两端点的“高度”$f(a)$与$f(b)$的算术平均作为平均高度$f(\xi)$的近似值，这样导出的求积公式：

$$T=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \tag{1.1}$$

便是我们所熟悉的梯形公式.

而如果改用区间中点 $c=\dfrac{a+b}{2}$ 的“高度”$f(c)$近似地取代平均高度$f(\xi)$，则又可导出所谓中矩形公式(今后简称矩形公式):

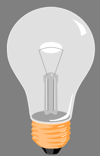
$$R=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{1.2}$$

3.1 Newton-Cotes求积分式

3.1.1 插值型求积法

关键是$f(x)$

近似计算 $I=\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx$



思路 利用插值多项式 $P_n(x)\approx f(x)$ 则积分易算。

插值型积分公式

在$[a, b]$上取 $a \le x_0 < x_1 < \ldots <$ … b，做 f 的 n 次插值多项式 $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)$ 即得到

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b l_k(x)dx$$

A_k

$$A_k = \int_a^b \prod_{j \neq k} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} dx$$

由节点 决定，与 $f(x)$ 无关。

$$I[f]=\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \qquad (3.1.1)$$

其中求积系数

$$A_k=\int_a^b l_k dx ,\ k=0,1,\cdots n \qquad (3.1.2)$$

称由**(3.1.2)**给出求积系数的公式**(3.1.1)**为插值型求积公式。

利用**Lagrange**插值多项式的余项可知插值型求积公式的余项为

$$R[f]=I-I_n=\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)=\int_a^b [f(x)-L_n(x)]dx=\int_a^b R_n(x)dx$$

$$=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\,dx=\frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi)\,\omega_{n+1}(x)dx$$

其中ξ与变量*x*有关。由此可知，对于次数小于或等于**n**的多项式

发***f(x)***，其余项 $R_n[f]=0$ 。

例3.1 给定求积节点 $x_0=1/4$, $x_1=3/4$ 试推出计算积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 的插值型求积公式，并写出它的余项。

解： 因要求所构造的求积公式是插值型的，故其求积系数可表示为

$$A_0=\int_0^1 l_0(x)dx=\int_0^1\frac{1}{2}(3-4x)dx=\frac{1}{2}$$

$$A_1=\int_0^1 l_1(x)dx=\int_0^1\frac{1}{2}(3-4x)dx=\frac{1}{2}$$

故求积公式为

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}[f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})]$$

若 $f''(x)$ 在[0，1]上存在，则该求积公式的余项为

$$R[f]=\frac{1}{2}\int_0^1 f''(\xi)(x-\frac{1}{4})(x-\frac{3}{4})dx$$

其中 ξ 属于（0，1）并依赖于x。

数值求积方法是近似方法，为要保证精度，我们自然希望求积公式能对“尽可能多”的函数准确地成立，这就提出了所谓代数精度的概念.

定义3.1 如果某个求积公式对于次数≤m的多项式均能准确地成立，但对于m+1次多项式就不一定准确，则称该求积公式具有m次代数精度.

一般地，欲使求积公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 具有m次代数精度，只要令它对于$f(x)=1$，x，…，x^m都能准确成立，这就要求

$$\begin{cases} \sum A_k = b-a; \\ \sum A_k x_k = \dfrac{1}{2}(b^2-a^2); \\ \qquad \cdots \\ \sum A_k x_k^m = \dfrac{1}{m+1}(b^{m+1}-a^{m+1}). \end{cases}$$

如果求积公式是插值型的，按余项式，对于次数 $\leqslant n$ 的多项式 $f(x)$，其余项 $R[f]$ 等于0，因而这时求积公式至少具有n次代数精度.

定理1：形如 $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 的求积公式至少有 n 次代数精度 $\Leftrightarrow$ 该公式为插值型（即：$A_k = \int_a^b l_k(x)dx$）

1、对于 $[a, b]$ 上1次插值，有 $L_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$

$\Rightarrow A_1 = A_2 = \frac{b-a}{2} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$

此即梯形公式。

为便于计算，一般取等距离节点得到近似公式：

3.1.2 Newton-Cotes求积公式

将积分区间[a，b]划分为n等分，步长h=（b-a）/n，节点 $x_k = a + kh, k = 0,1,\cdots n.$ 插值型求积公式(3.1.1)可以写成

$$I[f] \approx I_n[f] = (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k), \tag{3.1.3}$$

其中

$$c_k^{(n)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b l_k(x)\,dx \tag{3.1.4}$$

公式(3.1.3)称为n 阶**Newton-Cotes求积公式**,称 $c_k^{(n)}$ 为**Cotes系数**

利用节点的等分性,可以把Cotes系数的表达式化简.作变化 $x=a+th$,则有

$$\begin{aligned} c_k^{n} &= \frac{h}{b-a}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{t-j}{k-j}\,dt \\ &= \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!}\frac{1}{n}\int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} (t-j)\,dt \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

利用节点的等分性,可以把**Cotes**系数的表达式化简.作变化***x*=*a*+*th***,则有

$$C_k^n = \frac{h}{b-a}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{t-j}{k-j}dt$$

$$= \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!}\frac{1}{n}\int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} (t-j)dt$$

可见, $C_k^{(n)}$系数不但与被积函数无关,而且与积分区间也无关,并且,由**(3.1.5)**可知, $C_k^{(n)} = C_k^{(n-k)}, k = 0,1,\cdots n.$利用**(3.1.5)**求出的部分**Cotes**系数见表**3-1.**

表 3-1

n									
1	½	½							
2	1/6	4/6	1/6						
3	1/8	3/8	3/8	1/8					
4	7/90	32/90	12/90	32/90	7/90				
5	19/288	75/288	50/288	50/288	75/288	19/288			
6	41/840	216/840	27/840	272/840	27/840	216/840	41/840		
7	751/17280	3577/17280	1323/17280	2989/17280	2989/17280	1323/17280	3577/17280	751/17280	
8	989/28350	5888/28350	-928/28350	10496/28350	-4540/28350	10496/28350	-928/28350	5888/28350	989/28350

当n=1时,Cotes系数为

$$C_0^{(1)} = C_1^{(1)} = 1/2,$$

求积分式化为

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]. \qquad (3.1.6)$$

此公式称为梯形公式。.

当n=2时,Cotes系数为

$$C_0^{(2)} = \frac{1}{6}, C_1^{2} = \frac{4}{6}, C_2^{2} = \frac{1}{6}$$

求积公式为

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] \qquad (3.1.7)$$

此公式称为**Simpson**公式。

例3.2 用Newton-Cotes公式计算积分 $\int_0^{\pi/4} \sin x dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的近似值

解 利用公式（3.1.3），计算结果列于表3-2，其中误差采用积分精确值减去用Newton-Cotes公式的计算值。

表3-2

n	1	2	3
计算值	0.27768018	0.29293264	0.29291070
误差	0.01521303	0.00003942	0.00001748

3.1.3 Newton-Cotes公式的误差分析

定理 **3.1** 设 $f(x)\in C^2[a,b]$，则对梯形公式**(3.1.6)**有

$$R_1[f]=I[f]-I_1[f]=-\frac{b-a}{12}f''(\eta),\eta\in[a,b] \qquad \textbf{(3.1.8)}$$

证 设 $L_1(x)$是**f(x)**以 $x_0=a, x_1=b$ 为节点的一次插值多项式**,**

那么有

$$R_1(x)=f(x)-L_1(x)=f[x_0,x_1,x]\omega_2(x)$$

两边积分的梯形公式的误差

$$R_1(f)=\int_a^b f[x_0,x_1,x]\omega_2(x)$$

由于 $\omega_2(x)=(x-a)(x-b)$ 在**[a,b]**上不变号，$f(x)\in c^2[a,b]$，

故 $f[x_0,x_1,x]$ 在**[a,b]**上是连续的**.**由于积分中值定理得

$$R_1(f)=f[x_0,x_1,\xi]\int_a^b \omega_2(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}f''(\eta)[-\frac{1}{6}(b-a)^3],\xi,\eta\in[a,b].$$

由此即得**(3.1.8).**

定理 3.2 设 $f(x)\in c^4[a,b]$ ，则对**Simpson**公式**(3.1.7)**有

$$R_2(x)=I[f]-I_2[f]=-\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{4}(\eta),\eta\in[a,b] \qquad (3.1.9)$$

证 设 $L_2(x)$ 是f(x)以 $x_0=a, x_1=(a+b)/2, x_2=b$ 为节点的

二次插值多项式,那么有

$$R_2(x)=f(x)-L_2(x)=f[x_0,x_1,x]\omega_3(x)$$

由于 $\omega_3(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ 在 x_1 处变号,因此上式不能直接

利用积分中值定理.为此,令

$$\Omega(x)=\int_a^x \omega_3(t)dt\ ,$$

则有 $\Omega(x_0)=\Omega(a)=0,\Omega(x_2)=\Omega(b)=0,\ x\in(a,b).$

由分部积分得

$$R_2[f]=\int_a^b f[x_0,x_1,x_2\ x]\Omega'(x)dx$$

$$\Omega(x)f[x_0,x_1,x_2,x]\Big|_a^b-\int_a^b\Omega(x)f'[x_0,x_1,x_2,x]dx$$

$$=-\int_a^b\Omega(x)f'[x_0,x_1,x_2,x]dx.$$

由于 $f(x)\in C^4[a,b]$,故 $f'[x_0,x_1,x_2,x]$

对 $x\in[a,b]$ 是连续的.由于积分中值定理得

$$
\begin{aligned}
R_2[f] &= -f'[x_0,x_1,x_2,\xi]\int_a^b \Omega(x)dx \\
&= -\frac{1}{24}f^{(4)}(\eta)\left[\frac{4}{15}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5\right], \xi,\eta\in[a,b]
\end{aligned}
$$

由此即得**(3.1.9).**

由**(3.1.8)**可见**,**梯形公式的代数精度为**1.**而**(3.1.9)**表明**,Simpson**公式的代数精度是**3.**更一般地**,**我们有下述论断**.**

定理 3.3 当n为偶数时,n阶Newton-Cotes公式(3.1.3)至少有n+1次 代数精度.

证 我们只要验证当n为偶数时,Newton-Cotes对 $f(x)=x^{n+1}$的余项为零.此时,由于 $f^{(n+1)}(x)=(n+1)!$，我们有

$$R_n[f]=\int_a^b \omega_{n+1}(x)dx = h^{n+2}\int_0^n \prod_{j=0}^{n}(t-j)dt$$

这里,x=a+th.再令t=u+n/2,进一步有

$$R_n[f]=h^{n+2}\int_{-n/2}^{n/2}\prod_{j=0}^{n}(u+n/2-j)du$$

显然,被积函数

$$\prod_{j=0}^{n}(u+n/2-j)=\prod_{j=-n/2}^{n/2}(u-j)$$

是个奇函数,因此

下面我们讨论**Newton-**Cotes公式的计算稳定性问题

在**Newton-Cotes**公式中,取**f(x)=1**,此时 $R_n[f]=0$, 并且有

$$\sum_{k=0}^{n} C_k^n = 1 \qquad \text{(3.1.10)}$$

一般地,假定初始数据 $f(x_k)$ 有舍入误差,设 $f(x_k) \approx f^*(x_k), k=0,1,\cdots n.$
反映在计算中有

$$\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k) \approx \sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f^*(x_k).$$

若记 $\delta = \max\limits_{0\le k\le n} |f(x_k) - f^*(x_k)|$,则有

$$\left|\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k) - \sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f^*(x_k)\right| \le \delta \sum_{k=0}^{n} |C_k^{(n)}| \qquad \text{(3.1.11)}$$

当 $C_k^{(n)} > 0(k=0,1,\cdots n)$时，由（**3.1.10**）和（**3.1.11**）知计算是稳定的。

由表**3-1**知，当 $n \ge 8$ ，**Cotes** 系数出现负值，那么

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k^{(n)}| >= \sum_{k=0}^{n} c_k^{(n)} = 1$$

特别地，假定$c_k^{(n)}(f(x_k)-f^*(x_k))>0$,并且

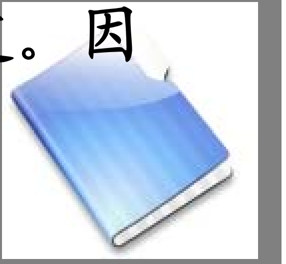
$|f(x_k)-f^*(x_k)|=\alpha$, 那么有

$$|\sum_{k=0}^{n} c_k^{(n)} f(x_k) - \sum_{k=0}^{n} c_k^{n} f^*(x_k)| = \sum_{k=0}^{n} c_k^{n} [f(x_k) - f^*(x_k)]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} |c_k^{(n)}|| f(x_k) - f^*(x_k)| > \alpha$$

此时，初始数据的误差引起计算结果的增大，即计算不稳定。

注：由公式知，当$n \geqslant 8$时，柯特斯系数出现负值，这时，初始数据误差将会引起计算结果误差增大，即计算不稳定。因此，实际计算不用$n \geqslant 8$的牛顿-柯特斯公式．



例3.3 试分别使用梯形公式和Simpson公式计算积分 $\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}dx$ 的近似值，并估计截断误差.

解 用梯形公式计算: $\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}dx \approx \frac{2-1}{2}\left(e+e^{\frac{1}{2}}\right)=2.1835$

$$f(x)=e^{\frac{1}{x}},\quad f'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}},\quad f''(x)=\left(\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)e^{\frac{1}{x}},$$

$$\max_{1\leq x\leq 2}|f''(x)|=f''(1)=8.1548.$$

估计截断误差为

$$|R_t|\leq\frac{(2-1)^3}{12}\max_{1\leq x\leq 2}|f''(x)|=0.6796$$

用Simpson公式计算:

$$\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}dx\approx\frac{2-1}{6}\left(e+4e^{\frac{1}{1.5}}+e^{\frac{1}{2}}\right)=2.0263.$$

$$f^{(4)}(x)=\left(\frac{1}{x^8}+\frac{12}{x^7}+\frac{36}{x^6}+\frac{24}{x^5}\right)e^{\frac{1}{x}}.$$

$$\max_{1\le x\le 2}|f^{(4)}(x)|=f^{(4)}(1)=198.43$$

估计截断误差为

$$|R_2|\le\frac{(2-1)^5}{2880}\max_{1\le x\le 2}|f^{(4)}(x)|=0.06890$$