2.4 正多项式和最佳平方逼近

- 2.4.1 离散点集上的正交多项式
- 2.4.2 连续区间上正交多项式
- 2.4.3连续函数的最佳平方逼近
- 总结

2.4　正交多项式和最佳平方逼近

正交多项式是数值计算中的重要工具，这里只介绍正交多项式的基本概念、某些性质和构造方法。离散情形的正交多项式用于下节的数据拟合，连续情形的正交多项式用于生成最佳平方逼近多项式和下章的高斯型求积公式的构造。它们在数值分析的其他领域中也有不少应用。

2.4.1 离散点集上的正交多项式

设有点集 $\{x_i\}_{i=0}^{m}$，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在离散意义下的内积定义为

$$(f,g)=\sum_{i=0}^{m} w_i f(x_i) g(x_i) \tag{2.4.1}$$

其中 $w_i>0$ 为给定的权数。在离散意义下，函数 $f(x)$ 的2范数定义为

$$\|f\|_2=\sqrt{(f,f)} \tag{2.4.2}$$

有了内积，就可以定义正交性。若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的内积 $(f,g)=0$，则称两者正交。若多项式组 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ 在离散意义下的内积满足

$$(\varphi_i,\varphi_j)=\begin{cases}0, i\neq j\\ a_i>0, i=j\end{cases} \tag{2.4.3}$$

则称多项式组 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ 为在离散点集 $\{x_i\}_{i=0}^{m}$ 上的带权 $\{w_i\}_{i=0}^{m}$ 的正交多项式序列。

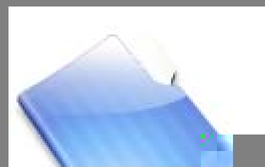
下面给出离散点上正交多项式的构造方法.

给定点集 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ 和权数 $\{w_i\}_{i=0}^{m}$ ，并且点集 $\{x_i\}_{i=0}^{m}$ 中至少有 $n+1$ 个互异，则由下列三项递推公式

$$\begin{cases}P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x-a_0,\\ P_{k+1}(x)=(x-a_k)P_k(x)-b_kP_{k-1}(x), k=1,2,\cdots n-1\end{cases} \tag{2.4.4}$$

给出的多项式序列 $\{P_k(x)\}_{k=0}^{n}(n<m)$ 是正交多项式序列，其中

$$a_k=\frac{(xP_k,P_k)}{(P_k,P_k)}, b_k=\frac{(P_k,P_k)}{(P_{k-1},P_{k-1})}. \tag{2.4.5}$$



三项递推公式（2.4.4）是构造正交多项式的简单公式，此外，还有其他的特殊的情形，这里，不进一步讨论。

例2.10 已知点集 $\{x_i\}_{i=0}^{4}=\{0,0.25,0.5,0.75,1\}$ 和权数 $\{w_i\}_{i=0}^{4}=\{1,1,1,1,1\}$ 试用三项递推公式求关于该点集的正交多项式 $P_0(x),P_1(x),P_2(x)$。

解 先令 $P_0(x)=1$，由此得

$$(P_0,P_0)=\sum_{i=0}^{4}w_i P_0^2(x_i)=5,(xP_0,P_0)=\sum_{i=0}^{4}w_i x_i P_0^2(x_i)=2.5,$$

$$a_0=(xP_0,P_0)/(P_0,P_0)=0.5,P_1(x)=x-a_0=x-0.5$$

由此得

$$(P_1,P_1)=\sum_{i=0}^{4}w_i P_1^2(x_i)=0.625,(xP_1,P_1)=\sum_{i=0}^{4}w_i x_i P_1^2(x_i)=0.3125.$$

从而有

$$a_1=(xP_1,P_1)/(P_1,P_1)=0.5,b_1=(P_1,P_1)/(P_0,P_0)=0.125$$

$$P_2(x)=(x-a_1)P_1(x)-b_1P_0(x)=(x-0.5)^2-0.125$$

2.4.2 连续区间上正交多项式

连续区间上的正交多项式的概念与离散点集上的正交多项式概念相似，只要将内积的定义作相应的改变。函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在连续意义下的内积定义为

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx,\ f,g\in C[a,b] \qquad (2.4.6)$$

其中的$\rho(x)\geq 0$为给定的权函数。按连续意义下的内积，若多项式组 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ 满足条件(2.4.3),则称它为在区间 $[a,b]$ 上的带权 $\rho(x)$ 的正交多项式序列.

完全类似于离散情况下的正交多项式的构造方法,连续区间上的正交多项式序列同样可以由递推公式(2.4.4)和(2.4.5)构造,其中内积按(2.4.6)式定义.

下面给出几种常用的正交多项式.

(1)Legendre多项式.

Legendre多项式可由三项递推公式

$$\begin{cases} P_0(x)=1, P_1(x)=x, \\ (n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x), k=1,2,\cdots, \end{cases} \qquad (2.4.7)$$

给出.它们是在区间 $[-1,1]$ 上的带权 $\rho(x)=1$ 的正交多项式.前几个Legendre多项式如下:

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x).$$

它们的根都是在开区间 $(-1,1)$上的单根,并且与原点对称.

(2)第一类Chebyshev多项式.

第一类Chebyshev多项式可由三项递推公式

$$\begin{cases} T_0(x)=1, T_1(x)=x, \\ T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x), k=1,2,\cdots, \end{cases} \tag{2.4.8}$$

给出.它们是在区间 $[-1,1]$ 上的带权 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的正交多项式.前几个第一类Chebyshev多项式如下:

$$T_2(x)=\frac{1}{2}x^2-1,$$

$$T_3(x)=4x^3-3x,$$

$$T_4(x)=8x^4-8x^2+1,$$

$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x.$$

它们的根都在开区间（-1，1）上的单根，并且与原点对称。

（3）Legendre多项式。

Legendre多项式可由三项递推公式

$$\begin{cases} L_0(x)=1, L_1(x)=1-x, \\ L_{n+1}(x)=(1+2n-x)L_n(x)-n^2L_{n-1}(x), n=1,2,\cdots, \end{cases} \quad (2.4.9)$$

给出。它们是在区间[0，+∞)上带权$\rho(x)=e^{-x}$ 的正交多项式。
前几个Legendre多项式如下:

$$L_2(x) = x^2 - 4x + 2,$$
$$L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6,$$
$$L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$$
$$L_4(x) = -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120$$

它们的根都是在区间（0，+∞）上的单根。

(4) Hermite 多项式

Hermite多项式可由三项递推公式

$$\begin{cases} H_0(x)=1, H_1(x)=1, \\ H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x), n=1,2,\cdots \end{cases} \qquad (2.4.10)$$

给出。它们是在区间（-∞，+∞）上带权 $\rho(x)=e^{-2x^2}$ 的正交多项式。前几个Hermite多项式如下：

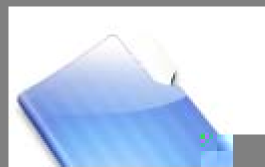
$$H_2(x)=4x^2-2,$$

$$H_3(x)=8x^3-12x,$$

$$H_4(x)=16x^4-48x^2+12,$$

$$H_5(x)=32x^5-160x^3+120x.$$

它们的根都在区间（-∞，+∞）上的单根，并且与原点对称



2.4.3连续函数的最佳平方逼近

连续函数空间C[a,b]上定义了内积（2.4.6）就形成了一个内积空间。在Rn空间中任一向量都可用它的线形无关的基表示，类似地，对内积空间任一元素f(x)∈ C[a,b]，也可用线形无关的基表示。

设 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots \varphi_n(x)$, 在[a,b]上连续，如果

$$a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x) = 0$$

当且仅当 $a_0 = a_1 = \cdots = a_n$ 时成立，则称 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_n$ 在[a,b]上是线性无关的。对于函数组 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ 的线性无关性，有如下定理。

定理2.6 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots \varphi_n(x)$, 在[a,b]上线性无关的充要条件是它的Gramer行列式$G_n \neq 0$，其中

$$G_n = \begin{vmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_0) \\ (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_0,\varphi_n) & (\varphi_1,\varphi_n) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{vmatrix}.$$

下面我们先讨论在区间[a,b]上 一般的最佳平方逼近问题。 设 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots\varphi_n(x),$ 是C[a,b]中的线性无关函数，记

$$\Phi = span\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\} = \{\varphi(x):\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(x), a_k \in R\}$$

对于f(x)∈C[a,b],若存在 $\varphi^*(x)\in\Phi$， 使得

$$\|f-\varphi^*\|_2^2 = \inf_{\varphi\in\Phi} \int_a^b \rho(x)[f(x)-\varphi(x)]^2 dx ,$$

则称 $\varphi^*(x)$是发f(x)在$\Phi\subset C[a,b]$中的最佳平方逼近函数。

求$\varphi^*(x)$等价于求多元函数

$$I(a_0,a_1,\cdots a_n) = \int_a^b \rho(x)[\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(x) - f(x)]^2 dx$$

的极小值。利用多元函数求极小值的必要条件有

$$\frac{\partial I}{\partial a_j}=2\int_a^b \rho(x)[\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(x)-f(x)]\varphi_j(x)dx=0,\ j=0,1,\cdots n.$$

按内积的定义，上式可写为

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(\varphi_k,\varphi_j)=(f,\varphi_j),\ j=0,1,\cdots,n \qquad (2.4.12)$$

这是关于的线性方程组，称为法方程。

由于$\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n$线性无关，故（2.4.12）的系数距阵非奇异，于是（2.4.12）有唯一解 $a_k=a_k^*, k=0,1,\cdots,n$ 。从而得到

$$\varphi^*(x)=a_0^*\varphi_0(x)+a_1^*\varphi_1(x)+\cdots+a_n^*\varphi_n(x). \qquad (2.4.13)$$

该式满足（2.4.11），即对任意$\varphi(x)\in\Phi$，有

$$\left\|f-\varphi^*\right\|_2\le\left\|f-\varphi\right\|_2. \qquad (2.4.14)$$

事实上，有（2.4.12）知

$$(\sum_{k=0}^{n} a_k^*\varphi_k-f,\varphi_j)=0,\ j=0,1,\cdots,n.$$

因此，对任意 $\varphi(x)\in\Phi$，有 $(\varphi^*-f,\varphi)=0$，从而也有 $(f-\varphi^*,\varphi^*-\varphi)=0$

于是

$$\|f-\varphi\|_2^2=\|f-\varphi^*+\varphi^*-\varphi\|_2^2=\|f-\varphi^*\|_2^2+2(f-\varphi^*,\varphi^*-\varphi)+\|\varphi^*-\varphi\|_2^2$$

$$\|f-\varphi^*\|_2^2+\|\varphi^*-\varphi\|_2^2\geq\|f-\varphi^*\|_2^2.$$

这就证明了（**2.4.14**），从而也证明了**f**在中的最佳平方逼近的存在唯一性。

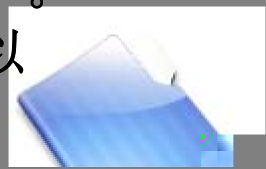
若令，则称为最佳逼近的误差，称

$$\|\delta\|_2^2=(f-\varphi^*,f-\varphi^*)=(f,f)-(\varphi^*,f)$$

$$=\|f\|_2^2-\sum_{k=0}^{n}a_k^*(\varphi_k,f) \qquad \textbf{(2.4.15)}$$

为平方误差。

考虑特殊情形，设[a,b]=[0,1], $\varphi_k(x)=x^k, k=0,1,\cdots n, \rho(x)=1$ 。对于f∈C[a,b], 在 $\Phi=span\{1,x,\cdots x^n\}$ 中最佳平方逼近多项式可以表示为



$$p_n^*(x)=a_0^*+a_1^*x+\cdots+a_n^*x^n,$$

相应于法方程（2.4.12）中的系数矩阵为

$$H_{n+1}=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/(n+1) & 1/(n+2) & \cdots & 1/(2n+1) \end{bmatrix}$$

称之为**Hilbert矩阵**

例2.11　设 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$，求[0，1]上的一次最佳平方逼近多项式。

解　由于

$$\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x,$$

$$(f,\varphi_0)=\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 1.147$$

$$(f,\varphi_1)=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\approx 0.609$$

得方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.147 \\ 0.609 \end{pmatrix}$$

解得a0=0.394,a1=0.246。从而最佳平方逼近为

$$p_1^*(x) = 0.934 + 0.426x$$

平方误差

$$\|\delta\|_2^2 = \int_0^1 (1+x^2)dx - 0.934(f,\varphi_0) - 0.426(f,\varphi_1) = 0.0026$$

由于Hilbert矩阵是病态的（见第4章），用$\{1, x, \cdots, x^n\}$作基时，求法方程的解，舍入误差很大。实用的办法是采用正交多项式作基。

若$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots \varphi_n(x)$是中的正交多项式组，则有（2.4.12）得

$$a_k^* = \frac{(f,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)}, k = 0,1,\cdots n$$ 。

于是f(x)的最佳平方逼近多项式为

$$\varphi^*(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(f,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)}\varphi_k(x)$$

例2.12　设 f(x)=e^x ,在[-1,1]上用legendre多项式作f的三次多次最佳平方逼近多项式。

解　　用Legendre多项式 Pk(x)(k=0,1,2,3), 可得

$$(f,P_0)=\int_{-1}^{1}e^x dx\approx 2.3504,\quad (f,P_1)=\int_{-1}^{1}xe^x dx\approx 0.7358$$

$$(f,P_2)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(3x-1)e^x dx\approx 0.1431,$$

$$(f,P_3)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(5x^2-3x)e^x dx\approx 0.02013,$$

$$a_0^*=(f,P_0)/(P_0,P_0)=1.1752,\quad a_1^*=(f,P_1)/(P_1,P_1)=1.0136,$$

$$a_2^*=(f,P_2)/(P_2,P_2)=0.3578,\quad a_3^*=(f,P_3)/(P_3,P_3)=0.07046,$$

于是最佳平方逼近为

$$\varphi^*(x) = 0.9963 + 0.9979x + 0.5367x^2 + 0.1761x^3 \text{。}$$

平方误差

$$\|\delta\|_2^2 = \int_{-1}^{1} e^{2x} dx - \sum_{k=0}^{3} (a_k^*)^2 (\varphi_k, \varphi_k) = 0.0007$$