



§ 2.3 三次样条插值

2.3.1 三次样条插值函数的概念

2.3.2 三弯矩算法

2.3.3 三转角算法

2.3.4 三次样条插值函数的误差估计

总结





2.3 三次样条插值

学习目标:

知道三次样条插值函数的概念，会求三次样条插值函数，进行误差分析。





2.3.1 三次样条插值函数的概念

一、背景

L-插值（牛顿插值）
Hermite插值 } 高次插值出现龙格现象

——> 分段插值 但分段线性插值在节点处不一定光滑

——> 分段Hermite插值 但导数值不容易提取（找到）

——> 三次样条插值（先由函数值确定导数值，再由分段Hermite插值解决问题）

举例：

- 1 汽车、船的外形设计，流体力学等要求流线型（光滑）；
- 2 木样条的来源。





二、样条函数的定义

定义 9 (3次样条函数)

设在区间 $[a, b]$ 上取 $n + 1$ 个节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 给定这些点的函数值 $f(x_i) = f_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$. 若 $S(x)$ 满足条件:

(1) $S(x) \in C^2[a, b]$;

(2) $S(x_i) = f_i, i = 0, 1, 2, \cdots, n$;

(3) 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上, $S(x)$ 是三次多项式。 则称 $S(x)$ 为 **三次样条插值函数**。

提出问题: 3次样条插值函数 $S(x)$ 是否存在? 是否唯一?
如何计算? 误差估计?





三次样条插值函数是分段三次多项式，在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上可以写成

$$S(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, i = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

其中 a_i, b_i, c_i 和 d_i 为待定系数。所以， $S(x)$ 共有 $4n$ 个待定参数。根据 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶导数连续的条件，在节点 $x_i (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ 处应满足连续性条件

$$S^{(k)}(x_i - 0) = S^{(k)}(x_i + 0), k = 0, 1, 2,$$

共有 $4n$ 个条件。再加上 $2n$ 个插值条件，共有 $6n$ 个条件。因此，还需要 $2n$ 个条件才能确定 $S(x)$ 。通常在区间端点通共所下租种： x_0 上各加一个条件（称为





(1) 已知两端的一阶导数值, 即

$$S'(x_0) = f_0', S'(x_n) = f_n' \quad (2.3.1)$$

(2) 已知两端的二阶导数值, 即

$$S''(x_0) = f_0'', S''(x_n) = f_n''. \quad (2.3.2)$$

其特殊情况为

$$S''(x_0) = 0, S''(x_n) = 0. \quad (2.3.2)'$$

(3) 周期边界条件

$$S^k(x_0) = S^k(x_n), k = 0, 1, 2. \quad (2.3.3)$$

此时, 对函数值有周期条件 $f_0 = f_n$

注: 一般不取一端是一阶导数而另一端是二阶导数。





2.3.2 三弯矩算法

三次样条插值函数 $S(x)$ 可以有多种表达式, 有时用二阶导数值 $S''(x_i) = M_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 表示时, 使用更方便。 M_i 在力学上解释为细梁在 x_i 处的弯矩, 并且得到的弯矩与相邻两个弯矩有关, 故称用 M_i 表示 $S(x)$ 的算法为**三弯矩算法**。

由于 $S(x)$ 在区间 $[x_i, x_{i+1}] (i = 0, 1, \dots, n-1)$ 上是三次多项式, 故 $S''(x_i)$ 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是线性函数, 可表示为

$$S''(x) = M_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i},$$

其中 $h_i = x_{i+1} - x_i$.

对 $S''(x)$ 积分两次, 并利用插值条件定出积分常数, 可以得到

$$S(x) = M_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{6h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{6h_i} + \left(f_i - \frac{M_i h_i^2}{6}\right) \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + \left(f_{i+1} - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6}\right) \frac{x - x_i}{h_i}, x \in [x_i, x_{i+1}]. \quad (2.3.4)$$



这是三次样条插值函数的表达式，当求出 $M_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 后， $S(x)$ 就由(2.3.4)完全确定。

对 $S(x)$ 求导得

$$S'(x) = -M_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} + f[x_i, x_{i+1}] - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i),$$

由此可得

$$S'(x_i + 0) = f[x_i, x_{i+1}] - \frac{h_i}{6}(2M_i + M_{i+1}),$$

$$S'(x_{i+1} - 0) = f[x_i, x_{i+1}] + \frac{h_i}{6}(M_i + 2M_{i+1}).$$

当 $x \in [x_{i-1}, x_i]$ 时， $S(x)$ 的表达式由(2.3.4)平移下标可得，因此有

$$S'(x_i - 0) = f[x_{i-1}, x_i] + \frac{h_{i-1}}{6}(M_{i-1} + 2M_i).$$

利用条件 $S'(x_i + 0) = S'(x_i - 0)$ 得





$$\mu_i M_i + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.3.5)$$

其中

$$\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} = 1 - \mu_i, \quad (2.3.6)$$

$$d_i = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]. \quad (2.3.7)$$

方程组(2.3.5)是关于 M_i 的方程组,有 $n+1$ 个未知数,但只有 $n-1$ 个方程.可由(2.3.1)—(2.3.3)的任一种边界条件补充两个方程。

对于边界条件 (2.3.1), 可以导出两个方程

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_0}(f[x_0, x_1] - f'_0) \\ M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_{n-1}}(f'_n - f[x_{n-1}, x_n]). \end{cases} \quad (2.3.8)$$





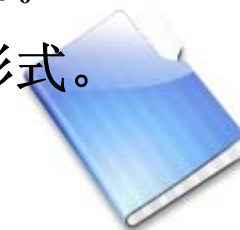
这样,由(2.3.5)和(2.3.8)可解出 $M_i (i = 0, 1, \dots, n)$, 从而得 $S(x)$ 的表达式(2.3.4),若令 $\mu_n = \lambda_0 = 1, d_0 = \frac{6}{h_0}(f[x_0, x_1] - f'_0),$
 $d_n = \frac{6}{h_{n-1}}(f'_n - f[x_{n-1}, x_n]),$ 则(2.3.5)和(2.3.8)可以写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} \quad (2.3.9)$$

对于边界条件(2.3.2),

直接得 $M_0 = f''_0, M_n = f''_n.$ (2.3.10)

将(2.3.10)代入(2.3.5)可解出 $M_i (i = 1, 2, \dots, n-1).$ 若令 $\mu_n = \lambda_0 = 0,$
 $d_0 = 2 f''_0, d_n = 2 f''_n,$ 则(2.3.5)和(2.3.10)可以写成(2.3.9)的形式。





实际上,方程组 (2.3.9) 和 (2.3.12)的系数矩阵是一类特殊的矩阵,在后面线性方程组的解法中,将专门介绍这类方程组的解法和性质。

例 2.9 设在节点 $\mathbf{x}_i = i(i = 0,1,2,3)$ 上,函数 $f(x)$ 的值为 $f(\mathbf{x}_0) = 0, f(\mathbf{x}_1) = 0.5, f(\mathbf{x}_2) = 2, f(\mathbf{x}_3) = 1.5$ 。试求三次样条插值函数 $S(x)$, 满足条件

$$(1) S'(\mathbf{x}_0) = 0.2, S'(\mathbf{x}_3) = -1,$$

$$(2) S''(\mathbf{x}_0) = -0.3, S''(\mathbf{x}_3) = 3.3.$$

解 (1) 利用方程组 (2.3.9) 进行求解, 可知

$h_i = 1(i = 0,1,2), \lambda_0 = 1, \mu_3 = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 0.5$ 。经简单计算有 $d_0 = 1.8, d_1 = 3, d_2 = -6, d_3 = -3$ 。由

此得 (2.3.9) 形式的方程组





$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 0.5 & 2 & 0.5 & \\ & 0.5 & 2 & 0.5 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

先消去 M_3 和 M_3 得

$$\begin{pmatrix} 3.5 & 1 \\ 1 & 3.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.1 \\ -10.5 \end{pmatrix}$$

由此解得 $M_1 = 2.52, M_2 = -3.72$ 。代回方程组得 $M_0 = -0.36, M_3 = 0.36$ 。

用 M_0, M_1, M_2, M_3 的值代入三次样条插值函数的表达式 (2.3.4)，经化简有

$$S(x) = \begin{cases} 0.48x^3 - 0.18x^2 + 0.2x, & x \in [0,1] \\ -1.04(x-1)^3 + 1.26(x-1)^2 + 1.28(x-1) + 0.5, & x \in [1,2] \\ 0.68(x-2)^3 - 1.86(x-2)^2 + 0.68(x-2) + 2, & x \in [2,3] \end{cases}$$

(2) 仍用方程组进行求解，不过要注意 $\lambda_0, \mu_3, d_0, d_3$ 的不同。由于 M_0 和 M_3 已知，故可以化简得





$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.3 \\ -15.3 \end{pmatrix}.$$

由此解得 $M_1 = 2.7, M_2 = -4.5$ 。

将 M_0, M_1, M_2, M_3 代入三次样条插值函数的表达式 (2.3.4)，经化简有

$$S(x) = \begin{cases} 0.5x^3 - 0.15x^2 + 0.15x, & x \in [0,1] \\ -1.2(x-1)^3 + 1.35(x-1)^2 + 1.35(x-1) + 0.5, & x \in [1,2] \\ 1.3(x-1)^3 - 2.25(x-2)^2 + 0.45(x-2) + 2, & x \in [2,3] \end{cases}$$

2.3.3 三转角算法

下面构造一阶导数值 $S'(x_i) = m_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 表示的三次样条插值函数。 m_i 在力学上解释为细梁在 x_i 截面处的转角，并且得到的转角与相邻两个转角有关，故称用 m_i 表示 $S(x)$ 的算法为**三转角算法**。



根据Hermite插值函数的唯一性和表达式 (2.136) — (2.138) ,
可设 $S(x)$ 在区间 $[x_i, x_{i+1}] (i = 0, 1, \dots, n-1)$ 上的表达式为

$$S(x) = \frac{[h_i + 2(x - x_i)](x - x_{i+1})^2}{h_i^3} f_i + \frac{[h_i + 2(x_{i+1} - x)](x - x_i)^2}{h_i^3} f_{i+1} \\ + \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})^2}{h_i^2} m_i + \frac{(x - x_{i+1})(x - x_i)^2}{h_i^2} m_{i+1}.$$

对 $S(x)$ 求二次导数得

$$S''(x) = \frac{6x - 2x_i - 4x_{i+1}}{h_i^2} m_i + \frac{6x - 4x_i - 2x_{i+1}}{h_i^2} m_{i+1} \\ + \frac{6(x_i + x_{i+1} - 2x)}{h_i^3} (f_{i+1} - f_i).$$

于是有

$$S''(x_i + 0) = -\frac{4}{h_i} m_i - \frac{2}{h_i} m_{i+1} + \frac{6}{h_i^2} (f_{i+1} - f_i).$$





同理，考虑 $S(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的表达式，可以得到

$$S''(x_{i-0}) = \frac{2}{h_{i-1}} m_{i-1} + \frac{4}{h_{i-1}} m_i - \frac{6}{h_{i-1}^2} (f_i - f_{i-1}).$$

利用条件 $S''(x_i+0) = S''(x_i-0)$ ，得

$$\mu_i m_{i+1} + 2m_i + \lambda_i m_{i-1} = e_i, i = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.3.14)$$

其中， μ_i, λ_i 由 (2.3.6) 所示，而

$$e_i = 3(\lambda_i f[x_{i-1}, x_i] + \mu_i f[x_i, x_{i+1}]). \quad (2.3.15)$$

方程组(2.3.14)是关于 m_i 的方程组，有 $n+1$ 个未知数，但只有 $n-1$ 个方程。可由(2.3.1)—(2.3.3)的任一种边界条件补充两个方程。

对于边界条件 (2.3.1)，则两个方程 $m_0 = f'_0, m_n = f'_n, m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$ 满足方程组





$$\begin{pmatrix} 2 & \mu_1 & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 - \lambda_1 f'_0 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-2} \\ e_{n-1} - \mu_{n-1} f'_n \end{pmatrix} \quad (2.3.16)$$

由此可解得 m_1, m_2, \dots, m_{n-1} ，从而得 $S(x)$ 的表达式 (2.3.13)。

对于边界条件 (2.3.2)，则可导出两个方程

$$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = 3f[x_0, x_1] - \frac{h_0}{2} f''_0, \\ m_{n-1} + 2m_n = 3f[x_{n-1}, x_n] + \frac{h_{n-1}}{2} f''_n. \end{cases} \quad (2.3.17)$$

由(2.3.14)和(2.3.17)可解出 m_i ($i = 0, 1, \dots, n$)

若令

$$\begin{aligned} e_0 &= 3f[x_0, x_1] - \frac{h_0}{2} f''_0, \\ e_n &= 3f[x_{n-1}, x_n] + \frac{h_{n-1}}{2} f''_n \end{aligned}$$





则 (2.3.14) 和 (2.3.17) 可合并成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & \\ & \ddots & \vdots & \ddots & & \\ & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} & \\ & & & 1 & 2 & \\ & & & & & \mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{pmatrix} \quad (2.3.18)$$

对于边界条件 (2.3.3), 可得

$$\begin{cases} m_0 = m_n \\ \mu_n m_1 + \lambda_n m_{n-1} + 2m_n = e_n \end{cases} \quad (2.3.19)$$

其中

$$\mu_n = \frac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}}, \lambda_n = \frac{h_0}{h_{n-1} + h_0},$$

$$e_n = 3(\mu_n f[x_0, x_1] + \lambda_n f[x_{n-1}, x_n]).$$

由(2.3.14)和(2.3.19)可解出 $m_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 方程组的矩阵形式为



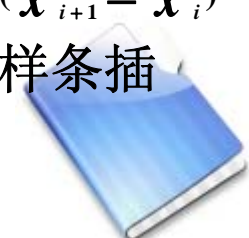


$$\begin{pmatrix} 2 & \mu_1 & & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-2} & \\ \mu_n & & \lambda_n & 2 & \mu_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{pmatrix} \quad (2.3.20)$$

2.3.4 三次样条插值函数的误差估计

在实际应用中，如果不需要规定内节点处的一阶导数值，那么使用三次样条插值函数会得到很好的效果。三次样条插值函数 $S(x)$ 不仅在内节点处的二阶导数是连续的，而且 $S(x)$ 逼近 $f(x)$ 具有很好的收敛性，也是数值稳定的。由于误差估计与收敛性定理的证明比较复杂，下面只给出误差估计的结论。

定理2.5 设函数 $f(x) \in C^4[a,b]$ ，记 $M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$, $h = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$ 则对任意 $x \in [a,b]$ ，满足边界条件 (2.3.1) 或 (2.3.2) 的三次样条插值函数 $S(x)$ 有估计式





$$\left| f^{(k)}(x) - S^{(k)}(x) \right| \leq C_k h^{4-k} M_4, k = 0, 1, 2 \quad (2.3.21)$$

$$\text{其中 } C_0 = \frac{5}{384}, C_1 = \frac{1}{24}, C_2 = \frac{1}{8}.$$

误差估计式 (2.3.21) 除可以用于误差估计外,它进一步表明,当 $f(x) \in C^4[a, b]$, 时, 在插值区间 $[a, b]$ 上, 对于满足边界条件 (2.3.1) 或 (2.3.2) 的插值函数 $S(x)$, 不仅 $S(x)$ 一致收敛于 $f(x)$, 而且 $S'(x)$ 一致收敛于 $f'(x)$, $S''(x)$ 一致收敛于 $f''(x)$ 。

