2.2 分段低次插值

- 2.2.1 多项式插值的问题
- 2.2.2 分段线性插值
- 2.2.3 分段三次Hermite插值

2.2 分段低次插值

学习目标:

掌握分段低次插值的意义及方法。

2.2.1 多项式插值的问题

用插值多项式近似被插函数时，并不是插值多项式的次数越多越好。下面是说明这种现象的一个典型例子。

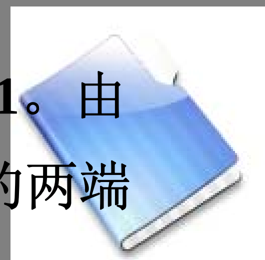
例**2.7** 给定函数

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2},-5\le x\le 5,$$

取等距插值节点 $x_k=-5+10k/n, k=0,1,2,\cdots,n$，构造n次Lagrange插值

$$L_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{1+x_i^2}\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}.$$

当n=10时，10次插值多项式 $L_{10}(x)$ 以及函数 $f(x)$ 的图形如图2-1。由此可见，$L_{10}(x)$ 的截断误差 $R_{10}=f(x)-L_{10}(x)$ 在区间[-5，5]的两端



非常大。例如，

$L_{10}(4.8)=1.80438$ 而 $f(4.8)=0.04160$ 。这种现象称**Runge** 现象。

不管**n**取多大，**Runge** 现象依然存在。

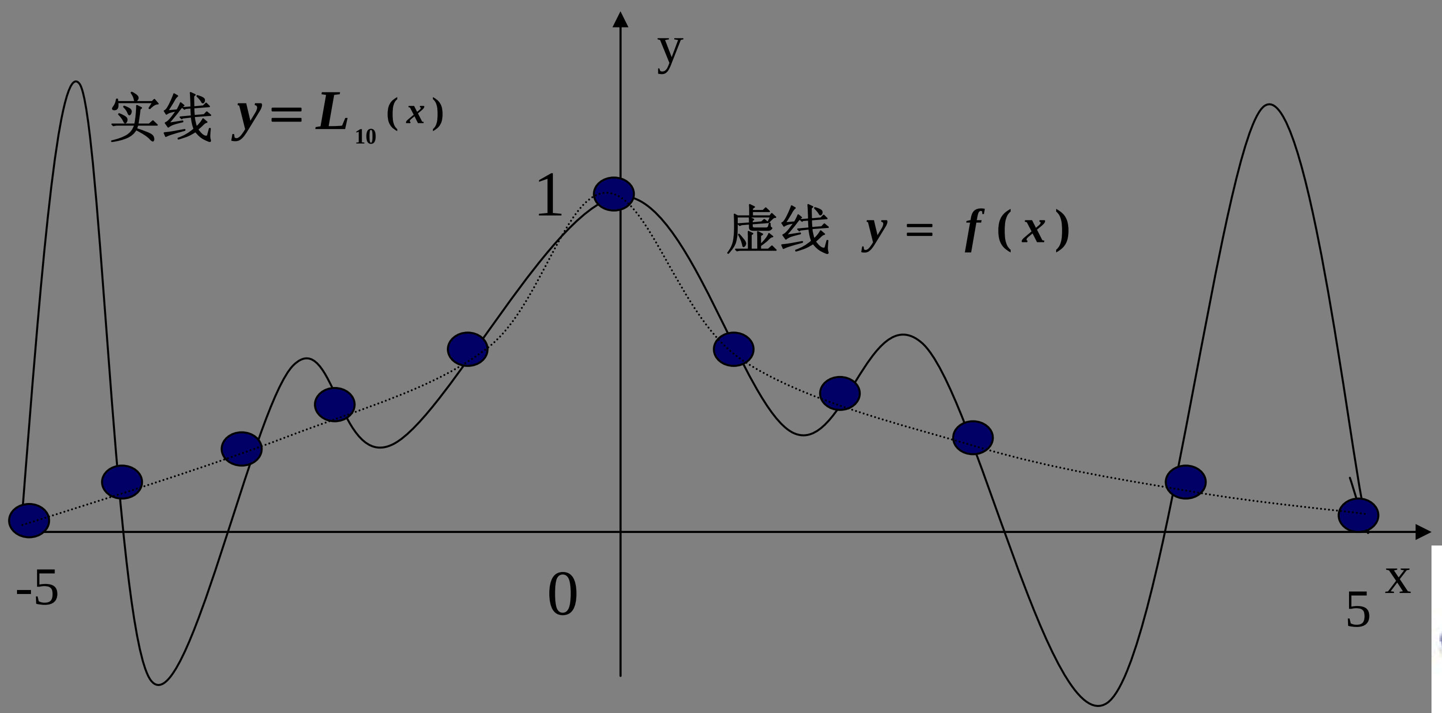


图**2-1**

因此，对函数作插值多项式时，必须小心处理，不能认为插值节点取得越多，插值余项就越小。此外，当节点增多时，舍入误差的影响不能低估。为了克服高次插值的不足，采用分段插值理论将是理论和实际应用的一个良好的插值方法。

2.2.2 分段线性插值

分段线性插值就是通过相邻两个插值点作线性插值来构成的。

设已知节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 上的插值函数值 $f_k = f(x_k),\ k = 0,1,2,\cdots,n$。记 $h_k = x_{k+1} - x_k,\ h = \max\limits_{0\le k\le n-1} h_k$。

若函数 $I_n(x)$ 满足条件：

$$(1)\ I_n(x) \in C[a,b];$$

$$(2)\ I_n(x_n) = f_k,\ k = 0,1,\cdots,n;$$

（3）在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}](k = 0,1,\cdots,n-1)$ 上，$I_n(x)$ 是线性多项式。则称 $I_n(x)$ 为**分段线性插值函数**。

分段线性插值函数 $I_n(x)$ 的几何意义是通过n+1个点 $(x_i, f_i)(i=0,1,2,\cdots,n)$ 的折线.在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}](k=0,1,\cdots,n-1)$ 上, $I_n(x)$ 的表示式为

$$I_n(x)=\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}f_k+\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}f_{k+1}. \qquad (2.2.1)$$

若用插值基函数表示,则在整个区间 $[a,b]$ 上, $I_n(x)$ 的表示式为

$$I_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x), \qquad (2.2.2)$$

插值基函数 $l_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$ 的形式为

$$l_i(x)=\begin{cases}(x-x_{i-1})/(x_i-x_{i-1}), & x\in[x_i, x_{i-1}],\\ (x-x_{i+1})/(x_i-x_{i+1}), & x\in[x_i, x_{i+1}],\\ 0，\text{其他。}\end{cases} \qquad (2.2.3)$$

其中,当 $i=0$ 时,没有第一式,当 $i=n$ 时,没有第二式.显然,分段线性插值基函数 $l_i(x)$ 只在 x_i 的附近不为零,在其他地方均为零,这种性质称为局部非零性.

分段线性插值函数的余项可以通过线性插值多项式的余项来估计.

定理2.3 如果 $f(x)\in C^2[a,b]$, 记 $M_2=\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$, 则对任意 $x\in[a,b]$, 分段线性 插值函数 $I_n(x)$ 有余项估计

$$|f(x)-I_n(x)|\le\frac{h^2}{8}M_2 \qquad (2.2.4)$$

证明 根据（2.1.10），在每个小区间 $[x_k,x_{k+1}](k=0,1,\cdots,n-1)$ 上有

$$|f(x)-I_n(x)|\le\frac{1}{8}(x_{k+1}-x_k)^2\max_{x_k\le x\le x_{k+1}}|f''(x)|.$$

因此，在整个区间 $[a,b]$ 上有

$$\left| f(x) - I_n(x) \right| \le \frac{h^2}{8} M_2 。$$

该定理也说明分段线性插值函数 $I_n(x)$ 具有一致收敛性。

例2.8 对平方根表作线性插值，已知 $10 \le x \le 999$，步长 $h=1$。试给出按插值方法求出的 $\sqrt{x}$ 的误差界，并估计有效数字的位数，假定表上给出的函数值足够精确。

解 令 $f(x) = \sqrt{x}$, $M = \max \left| f''(x) \right|$, 则由（2.2.4）知截断误差

$$\left| R(x) \right| \le \frac{1}{8} M h^2 .$$

分两段讨论 $\left| R(x) \right|$。

（1）当 $10 \le x \le 100$ 时，

$$|f''(x)| = \frac{1}{4x^{3/2}} \le \frac{1}{4\times 10^{3/2}} \approx 0.0079 = M$$

$$|R(x)| \le \frac{1}{8}\times 0.0079 \approx 0.00099.$$

由于 $3\le\sqrt{x}\le 10$，故 $\sqrt{x}$ 可以具有3位有效数字。

（2）当 $100\le x\le 999$ 时，

$$|f''(x)| = \frac{1}{4x^{3/2}} \le \frac{1}{4\times 100^{3/2}} \approx 0.25\times 10^{-3} = M,$$

$$|R(x)| \le \frac{1}{8}\times 0.25\times 10^{-3} \approx 0.0000313\ .$$

由于 $10\le x\le 32$ ， 故 $\sqrt{x}$ 可以具有6位有效数字。

2.2.3 分段三次Hermite插值

分段线性插值函数具有良好的一致收敛性，但它不是光滑的，它在节点处的左右导数不相等。为了克服这个缺陷，一个自然的想法是添加一阶导数的插值条件。

设已给节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 上的函数值和导数值

$$f_k = f(x_k), m_k = f'(x_k), k = 0,1,2,\cdots,n.$$

记 $h = \max\limits_{0 \le k \le n-1}(x_{k+1} - x_k)$. 如果函数 $I_n(x)$ 满足条件：

(1) $I_n(x) \in C^1[a,b]$;

(2) $I_n(x_k) = f_k, I'_n(x_k) = m_k, k = 0,1,2,\cdots,n.$

(3)在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}](k = 0,1,2,\cdots,n-1)$ 上，$I_n(x)$ 是三次多项式。则称 $I_n(x)$ 为**分段三次Hermite插值函数**。

显然，在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}](k = 0,1,2,\cdots,n-1)$ 上，$I_n(x)$ 的表示式为（2.1.38）。可以直接用它进行数值计算。

若用插值基函数表示，则在整个区间 $[a,b]$ 上 $I_n(x)$ 的表示式为

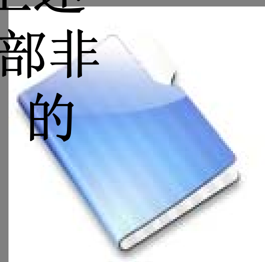
$$I_n(x) = \sum_{i=0}^{n}[f_i \alpha_i(x) + m_i \beta_i(x)] \qquad (2.2.5)$$

插值基函数 $\alpha_i(x)$ 和 $\beta_i(x)$ 的形式分别为

$$\alpha_i(x)=\begin{cases}\left(1+2\dfrac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}\right)\left(\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)^2, & x\in[x_{i-1},x_i],\\ \left(1+2\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\left(\dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2, & x\in[x_i,x_{i+1}],\\ 0, & \text{其他。}\end{cases} \tag{2.2.6}$$

$$\beta_i(x)=\begin{cases}(x-x_i)\left(\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)^2, & x\in[x_{i-1},x_i],\\ (x-x_i)\left(\dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2, & x\in[x_i,x_{i+1}],\\ 0, & \text{其他。}\end{cases} \tag{2.2.7}$$

其中，当 $i=0$时，上述两个分段函数没有第一式，当$i=n$时上述两个分段函数没有第二式。显然，（2.2.6）和（2.2.7）具有局部非零性质，这种性质使得（2.2.5）也可写成分段表示式（2.1.38）的形式。



分段三次Hermite插值函数的余项可以通过前面三次Hermite插值多项式的余项来估计。

定理2.4 如果 $f(x)\in C^4[a,b]$，记 $M_4=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$， 则对任意 $x\in[a,b]$，分段三次Hermite插值函数 $I_n(x)$ 有余项估计

$$\left|f(x)-I_n(x)\right|\le\frac{h^4}{384}M_4 . \qquad (2.2.8)$$

证明 根据（2.1.39），在每个小区间 $[x_k,x_{k+1}](k=0,1,\cdots,n-1)$ 上有

$$\left|f(x)-I_n(x)\right|\le\frac{1}{4!}\frac{1}{16}(x_{k+1}-x_k)^4\max_{x_k\le x\le x_{k+1}}\left|f^{(4)}(x)\right|.$$

因此，在整个区间 $[a,b]$ 上有（2.2.8）。

该定理除了可以用于误差估计外，还说明分段三次Hermite插值函数具有一致收敛性。