2.1 多项式插值

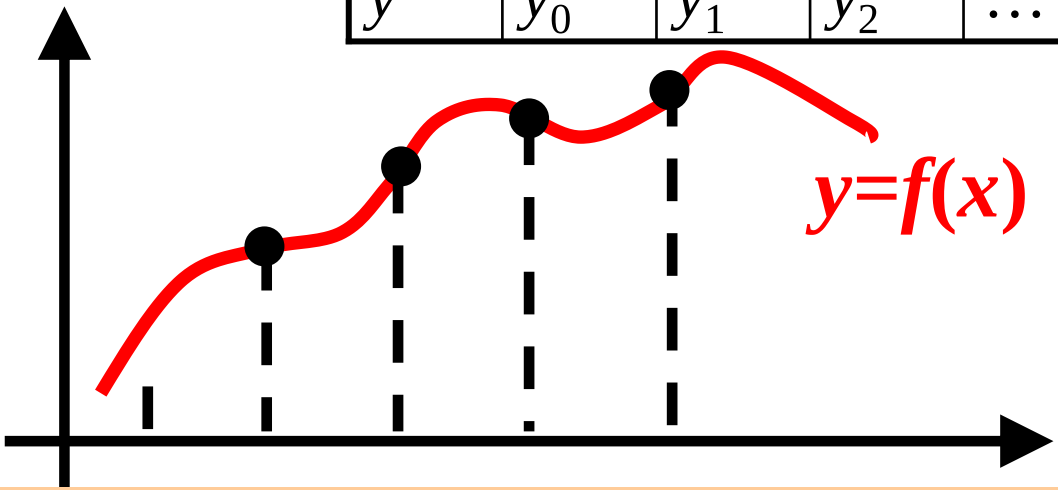
2.1 多项式插值

学习目标：掌握多项式插值的Lagrange插值公式、牛顿插值公式等，等距节点插值、差分、差商、重节点差商与埃米特插值。重点是多项式插值方法。

2.1.1 问题的提出

- 函数解析式未知，通过实验观测得到的一组数据， 即在某个区间$[a, b]$上给出一系列点的函数值 $y_i = f(x_i)$
- 或者给出函数表

x	x_0	x_1	x_2	…	x_n
y	y_0	y_1	y_2	…	y_n



求解：$y = f(x)$ 在$[a, b]$上任一点处函数值的近似值？

插值法

解决思路

根据 $f(x)$在n+1个已知点的值，求一个足够光滑又比较简单的函数$p(x)$作为 $f(x)$的近似表达式，

然后计算$p(x)$在$[a,b]$ 上点x 处的函数值作为原来函数 $f(x)$在此点函数值的近似值。

代数多项式、三角多项式、有理函数或样条函数

1、定义 设函数 $f(x)$ 在$[a, b]$上有定义，且已知在 $a \leqslant x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leqslant b$ 点上的值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$. 若存在一简单函数 $p(x)$，使得

近似计算$f(x)$的值、零点、极值点、导数、积分，

$$p(x_i) = y_i \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n \qquad (1.2)$$

成立, 则称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数。

(1.2)式称为插值条件， $f(x)$ 称为被插函数，

$[a, b]$ 称为插值区间， $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 称为插值节点 ，

求 $p(x)$ 的方法就是插值法。

插值点在插值区间内的称为内插, 否则称外插

插值函数$p(x)$在n+1个互异插值节点x_i (i=0,1,…,n) 处与$f(x_i)$相等, 在其它点 x 就用$p(x)$的值作为$f(x)$ 的近似值。这一过程称为**插值**，点 x 称为插值点。

换句话说，**插值**就是根据被插函数给出的函数表“插出”所要点的函数值。用$p(x)$的值作为$f(x)$的近似值, 不仅希望$p(x)$能较好地逼近$f(x)$, 而且还希望它计算简单 。

插值函数的类型有很多种

最常用的插值函数是 ..代数多项式　三角多项式

分段函数...

用代数多项式作插值函数的插值称为多项式插值

本章主要讨论的内容

插值问题 →插值法？ 插值函数

拟合法就是考虑到数据不一定准确，不要求近似表达式 $\varphi(x)$ 经过所有的点 (x_i, y_i)，而只要求在给定的 x_i 上误差 $\delta_i = y_i - \varphi(x)$（i=0，1，…n）按某种标准最小。若记 $\delta=(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)^T$，就是要求向量 δ 的泛数 $\|\delta\|$ 最小。

本章先讨论插值问题，然后讨论数据拟合的有关问题。

1. 定义： 若$p(x)$是次数不超过n的实系数代数多项式，即

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

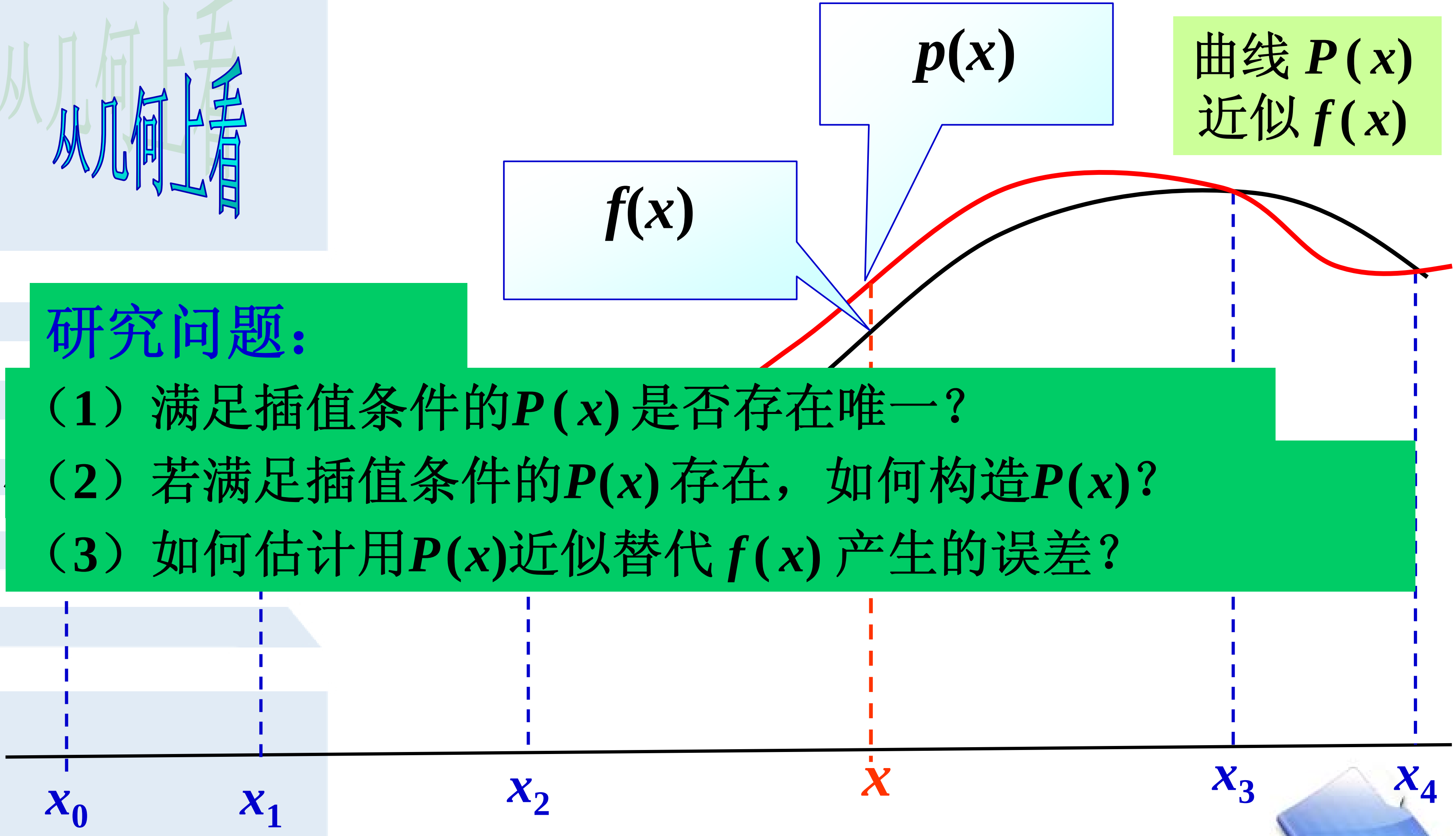
则称$p(x)$为n次插值多项式。

相应的插值法称为多项式插值法。

常用次数小于（等于）n的实系数代数多项式集合H_n：

$H_n=\{p_n(x)|p_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n，a_i$为实数$\}$

从几何上看



研究问题：

（1）满足插值条件的$P(x)$是否存在唯一？

（2）若满足插值条件的$P(x)$存在，如何构造$P(x)$？

（3）如何估计用$P(x)$近似替代$f(x)$产生的误差？

2、插值多项式的存在唯一性

$p(x_i)=y_i$
$i=0,1,2,\cdots,n$

设 $p_n(x)$是 $f(x)$ 的插值多项式，H_n表示次数不超过 n 的所有多项式的集合。且 $p_n(x)\in H_n$. 称插值多项式存在且唯一，就是指在 H_n 中有且仅有一个 $p_n(x)$ 满足插值条件(1.2)式。

由(1.2)可得

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=y_0 \\ a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_1^n=y_1 \\ \cdots\cdots \\ a_0+a_1x_n+\cdots+a_nx_n^n=y_n \end{cases} \quad (1.3)$$

$$V_n(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & & & & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & & & & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$\prod_{0\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

$$\neq 0\ (x_i\neq x_j)$$

范德蒙行列式

插值多项式的唯一性 $\Leftrightarrow$ 方程组(1.3)有唯一解

定理1　满足条件 (1.2) 的插值多项式存在且唯一。

$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$
存在唯一

上述的存在唯一性说明，满足插值条件的多项式存在，并且插值多项式与构造方法无关。然而，直接求解方程组(1.3)的方法，不但计算复杂，而且难于得到$p(x)$的简单表达式。下面，我们将给出不同形式的便于使用的插值多项式。

基本思想：在n次多项式空间P_n中找一组合适的基函数$\varphi_0(x)$，$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_3(x)$，使

$$p_n(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\ldots+a_n\varphi_3(x)$$

不同的基函数的选取导致不同的插值方法

Lagrange插值

Newton插值

2.1.2 Lagrange插值多项式

求 **n** 次多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 使得

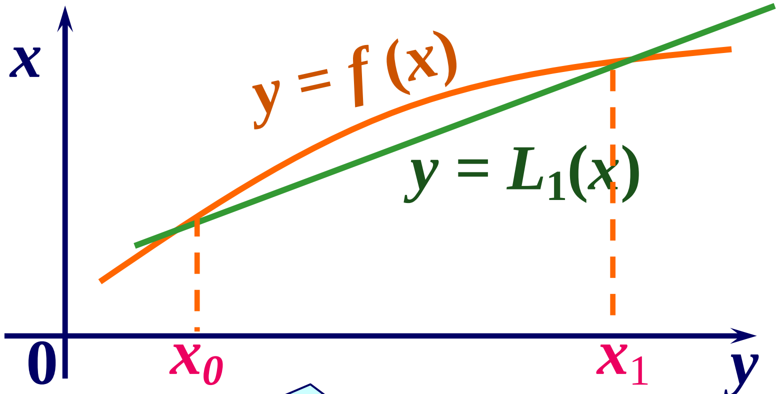
$$P_n(x_i)=y_i, i=0,1,\cdots,n$$

先考察低次插值多项式。

1、**线性插值**当n=1时，

要构造通过两点（x_0 , y_0）和 (x_1, y_1)的不超过1次的多项式$L_1(x)$，使得

$$L_1(x_0)=y_0, L_1(x_1)=y_1$$



$y=L_1(x)$的几何意义——过两点 (x_0, y_0) 与 (x_1, y_1) 的直线

$$L_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

或

$$L_1(x) = \boxed{y_0}\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + \boxed{y_1}\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

线 性 函 数

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \qquad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$L_1(x)$是两个线性函数的线性组合

称为节点上线性插值基函数

$$L_1(x) = y_0\, l_0(x) + y_1\, l_1(x)$$

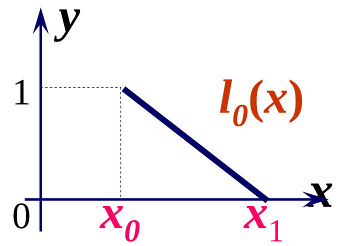
$$L_1(x) = y_0\, l_0(x) + y_1\, l_1(x)$$

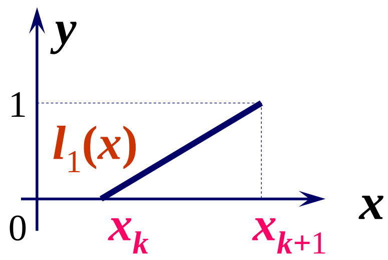
节点上的线性插值基函数:

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \qquad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

满足

$$l_k(x_k)=1,\ l_k(x_{k+1})=0;$$
$$l_{k+1}(x_k)=0,\ l_{k+1}(x_{k+1})=1.$$





例1 已知 $\sqrt{100}=10$ ， $\sqrt{121}=11$ ， **求** $y=\sqrt{115}$

解：这里 $x_0=100$，$y_0=10$，$x_1=121$，$y_1=11$, **利用线性插值**

$$L_1(x)=\frac{x-121}{100-121}\times 10+\frac{x-100}{121-100}\times 11$$

$$y=\sqrt{115}\approx p(115)=10.714$$

2、抛物插值法 (n =2 时的二次插值)

设插值节点为：x_{k-1}，x_k，x_{k+1}，求二次插值多项式$L_2(x)$，使得

$$L_2(x_j)=y_j,\quad j=k-1,\ k,\ k+1\ .$$

基函数法

$y=L_2(x)$的几何意义 ----- 过三点(x_{k-1},y_{k-1})，(x_k,y_k) 与(x_{k+1},y_{k+1}) 的抛物线,

先求 插值基函数$l_{k-1}(x)$, $l_k(x)$, $l_{k+1}(x)$ —— 二次函数,且在节点满足：

$$\begin{cases} l_{k-1}(x_{k-1})=1,\ l_{k-1}(x_k)=l_{k-1}(x_{k+1})=0; \\ l_k(x_k)=1, \qquad l_k(x_{k-1})=l_k(x_{k+1})=0; \\ l_{k+1}(x_{k+1})=1,\ l_{k+1}(x_{k-1})=l_{k+1}(x_k)=0, \end{cases}$$

求 $l_{k-1}(x)$: $l_{k-1}(x)=\boxed{A}(x-x_k)(x-x_{k+1})$, 待定系数

$$A=\frac{1}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})}$$

由 $\begin{cases} l_{k-1}(x_{k-1})=1, & l_{k-1}(x_k)=l_{k-1}(x_{k+1})=0; \\ l_k(x_k)=1, & l_k(x_{k-1})=l_k(x_{k+1})=0; \\ l_{k+1}(x_{k+1})=1, & l_{k+1}(x_{k-1})=l_{k+1}(x_k)=0, \end{cases}$

$$l_{k-1}(x)=\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})}$$

$$l_k(x)=\frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

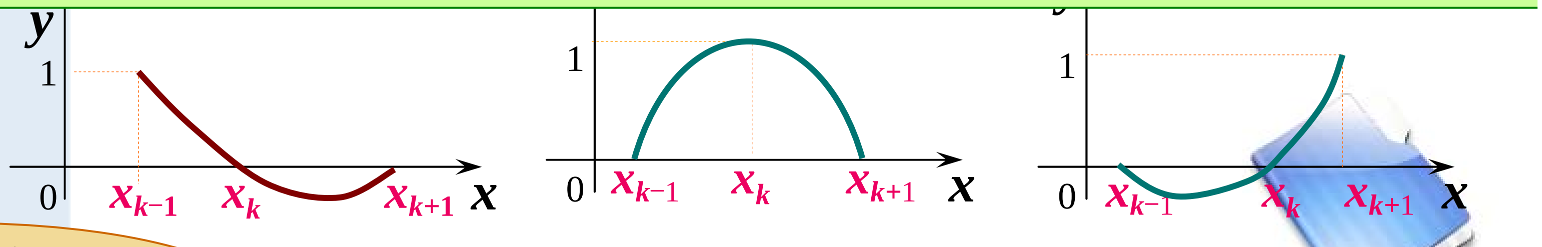
$$l_{k+1}(x)=\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}$$

$L_2(x_j)=y_j,\quad j=k-1,\ k,\ k+1$.

再构造插值多项式 插值条件

$$L_2(x)=y_{k-1}\,l_{k-1}(x)+y_k\,l_k(x)+y_{k+1}\,l_{k+1}(x)$$

$$L_2(x)=y_{k-1}\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})}+y_k\frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}+y_{k+1}\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}$$



$L_2(x)$是三个二次函数的线性组合

这种用插值基函数表示的方法容易推广到一般情形。

3、*Lagrange* 插值多项式（n次）

先求插值基函数
然后构造插值多项式

求通过$n+1$个节点的n次插值多项式$L_n(x)$:

设$L_n(x)$满足插值条件：$L_n(x_j)=y_j \quad (j=0,1,\cdots,n)$.

定义 若n次多项式$l_k(x)\ (k=0,1,\cdots,n)$在各节点

$x_0<x_1<\cdots<x_n$ 上满足条件

$$l_k(x_j)=\begin{cases}1, & k=j;\\ 0, & k\neq j,\end{cases} \quad j,k=0,1,\cdots,n$$

则称这$n+1$个n次多项式为这$n+1$个节点上的n次插值基函数。

（类似于前面讨论n =1，2 时的情形）

$$L_1(x) = y_0\, l_0(x) + y_1\, l_1(x)$$

$$L_2(x) = y_{k-1}\, l_{k-1}(x) + y_k\, l_k(x) + y_{k+1}\, l_{k+1}(x)$$

先求插值基函数

令 $l_k(x) = A(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)$,

由 $l_k(x_k)=1$, 得 $A = \dfrac{1}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$

$k = 0, 1, \cdots, n$.

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}, \quad k = 0, 1, \cdots, n.$$

再构造 插值多项式 （$L_n(x)$是$n+1$个插值基函数的线性组合）

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\,l_k(x)$$

定理（Lagrange）插值多项式

设 $y=f(x)$函数表 $(x_i, f(x_i))(i=0,1,\ldots,n)$ $(x_i\neq x_j$, 当$i\neq j)$,

则满足插值条件 $L_n(x_i)=f(x_i),(i=0,1\ldots n)$的插值多项式为

$$\boxed{L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\,l_k(x)}$$

其中 $l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\dfrac{x-x_j}{x_k-x_j}\quad (k=0,1,\ldots$

通常次数=n，但特殊情形次数可<n，

如：过三点的二次插值多项式

共线时

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)$$ 其中 $$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (k=0,1,\ldots n)$$

显然，如此构造的**L(x)** 是不超过**n**次多项式。当**n=1**时，称为线性插值。当**n=2**时，称为抛物线插值。

例2 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, f(x_1) = 8, f(x_2) = 1, f(x_3) = 5$

求二次插值多项式。

解 按拉格朗日方法，有：

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)}8 + \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)}1 + \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)}5$$

$$= 3x^2 - 16x + 21$$

练习 给定数据表

x_i	0	1	2	3
y_i	0	1	5	14

求三次拉格朗日插值多项式$L_3(x)$.

解： 取$n=3$,由$L_3(x)$公式得

$$L_3(x)=0\cdot l_0(x)+1\cdot l_1(x)+5\cdot l_2(x)+14\cdot l_3(x)$$

$$=0+1\frac{x(x-2)(x-3)}{1\cdot(-1)\cdot(-2)}+5\frac{x(x-1)(x-3)}{2\cdot 1\cdot(-1)}+14\frac{x(x-1)(x-2)}{3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=\frac{x(2x^2+3x+1)}{6}=\frac{1}{6}x(x+1)(2x+1).$$

设 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 为插值节点，n次多项式 $l_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$ 满足条件

$$l_k(x_i)=\delta_{ik}=\begin{cases}1, i=k,\\0, i\neq k.\end{cases}$$

由此可得

$$l_k(x)=\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}, k=0,1,\cdots,n,$$

称为lagrange插值基函数。引入记号

$$\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

容易求得

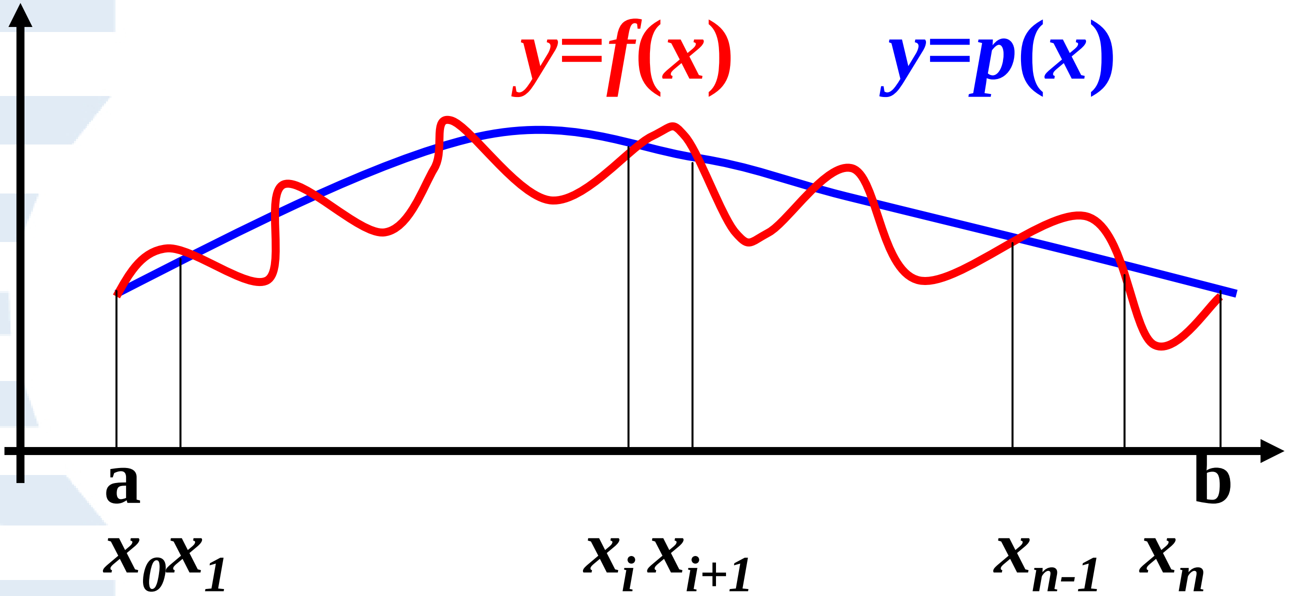
$$\omega'_{n+1}(x_k)=\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)$$

于是，$l_k(x)$可以写成

$$l_k(x)=\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}$$

4 Lagrange插值多项式的截断误差

在插值区间[a, b]上用插值多项式$p(x)$近似代替$f(x)$，除了在插值节点x_i上没有误差外，在其它点上一般是存在误差的。



若记 $R(x) = f(x) - p(x)$，则 $R(x)$ 就是用 $p(x)$ 近似代替 $f(x)$ 时的截断误差，或称插值余项. 我们可根据后面的定理来估计它的大小.

定理 设$f(x)$在$[a, b]$有$n+1$阶导数， $x_0, x_1,\ldots, x_n$ 为$[a, b]$上$n+1$个互异的节点, $L_n(x)$为满足

$$L_n(x_i) = f(x_i) \quad (i=1,2, \ldots, n)$$

的n 次插值多项式，那么对于任何$x \in [a, b]$，$\exists \xi \in (a,b)$, 有插值余项

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x). \qquad (2.1.10)$$

其中

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

分析：

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \qquad \xi \in (a,b).$$

因为 $\xi \in (a,b)$不确定， *Rolle* ，

证 设 x 为$[a,b]$上任一点，

插值条件

(1) 若 $x = x_i \ (i=0,1,...n)$，则$\boxed{f(x_i) = L_n(x_i),}$

即$R_n(x) = 0 =$右端,定理成立。

(2) 若$x \in [a,b]$，且$x \neq x_i \ (i=0,1,...,n)$， 由于 $R_n(x_i) = 0 \ (i=0,1,...,n)$，

， $R_n(x) = k(x)(x-x_0)(x-x_1)......(x-x_n) = k(x)\,\omega_{n+1}(x)$

$k(x)$ x

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$$

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - k(x)\omega_{n+1}(t),\ t \in [a,b]$$

$$k(x)$$

$$= \boxed{f(t) - L_n(t)} - \boxed{k(x)(t-x_0)(t-x_1)\ldots\ldots(t-x_n)},\ t \in [a,b]$$

$\varphi(t)$:

当t=x时，R_n（x）

当t=x时，R_n（x）

$\varphi(x)=0,\ \varphi(x_i)=0\ (i=0,1,\ldots,n)$ $\varphi(t)$ $[a,b]$ $n+2$

$\varphi^{(n)}(t)$在$[a,b]$连续，

$\varphi^{(n+1)}(t)$在(a,b)存在，且 $\varphi^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-k(x)(n+1)!$

由 ***Rolle*** 定理可知， $\varphi'(t)$在(a,b)内至少有 $n+1$个互异的零点，

$\varphi''(t)$在(a,b)内至少有 n个互异的零点，

……

$\varphi^{(n+1)}(t)$在(a,b)内至少有一个零点，

即存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0 \Leftrightarrow f^{(n+1)}(\xi)-k(x)(n+1)!=0$

$$\Leftrightarrow k(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$R_n(x)=k(x)\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$$

$\Rightarrow$ 余项公式: $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\ (x\neq x_i\quad i=0,1,\ldots,n).$

由 (1) 、 (2) 知定理结论成立。 #

$$\varphi(t)=f(t)-L_n(t)-k(x)(t-x_0)(t-x_1)\ldots\ldots(t-x_n)$$

$$\varphi^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-k(x)(n+1)!$$

$$R_n(x)=k(x)(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_n)=k(x)\omega_{n+1}(x)$$

注意

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),$$

- 余项表达式仅当 $f^{(n+1)}(x)$ 存在时才能应用，且是唯一的。
- ξ 在 (a,b) 内的具体位置通常不能给出。
- 若有 $\max\limits_{a<x<b}\left|f^{(n+1)}(x)\right| = M_{n+1}$，则截断误差限是 $\left|R_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\omega_{n+1}(x)\right|$.

$|R_n(x)|$ M_{n+1} $|\omega_{n+1}(x)|$ n $x\in[a,b]$

$n+1$ $|\omega_{n+1}(x)|$

- **n次插值多项式对次数不高于n次的多项式完全精确。**

若$f(x)$为次数不高于n次的多项式，

则$f^{(n+1)}(\xi)=0$， 从而$R_n(x)=0$.

- $n = 1, 2$ 时的插值余项：

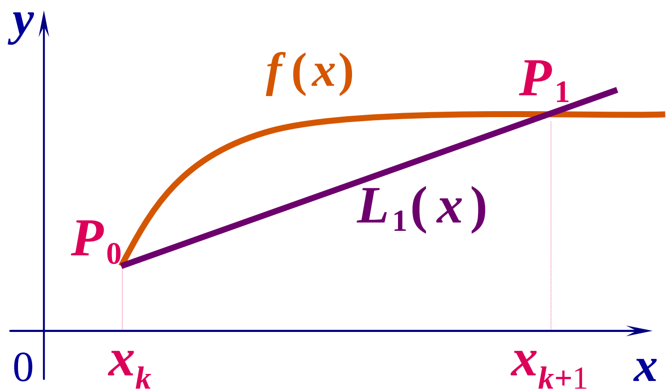
① 线性插值:

余项为 $R_1(x) = f(x) - L_1(x)$

$$= \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_k)(x - x_{k+1}) \qquad \xi \in (a, b)$$

用通过两点 P_0, P_1 的直线 $L_1(x)$ 来代替 $f(x)$, 即

$$f(x) \approx L_1(x) \qquad x \in [x_k,\ x_{k+1}]$$



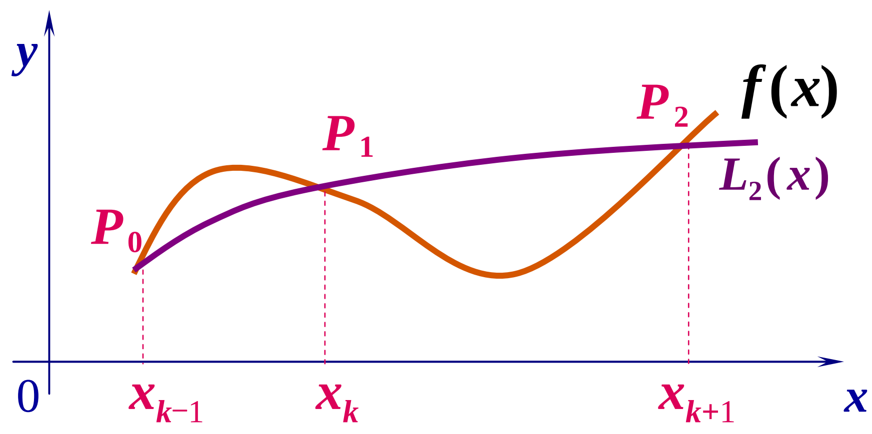
② **抛物线插值：** 余项为 $R_2(x)=f(x)-L_2(x)$

$$=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_{k-1})(x-x_k)(x-x_{k+1})$$

$$\xi\in(a,b)$$

用通过三点P_0,P_1,P_2抛物线近似代替$f(x)$，即

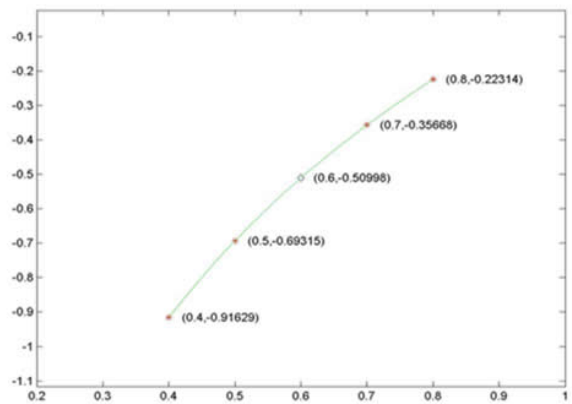
$$f(x)\approx L_2(x)\qquad x\in[x_{k-1},x_{k+1}]$$



$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|.$$

例 3 设*f* (*x*)=*ln x*,并以知*f* (*x*)的数据如表2-1。.

试用三次**Lagrange**插值多项式 **L_3(x)**来计算 ***ln*(0.6)**的近似值并估计误差。



F(x)=lnx 函数图象

表2-1

x	0.40	0.50	0.70	0.80
lnx	-0.916291	-0.693147	-0.356675	-0.223144

解 用 $x_0=0.40, x_1=0.50, x_2=0.70$ 和 $x_3=0.80$ 作三次Lagrange插值多项式 $L_3(x)$，把x=0.6代入 $L_3(x)$ 中，得

$$L_3(0.6)=-0.509975$$

由于

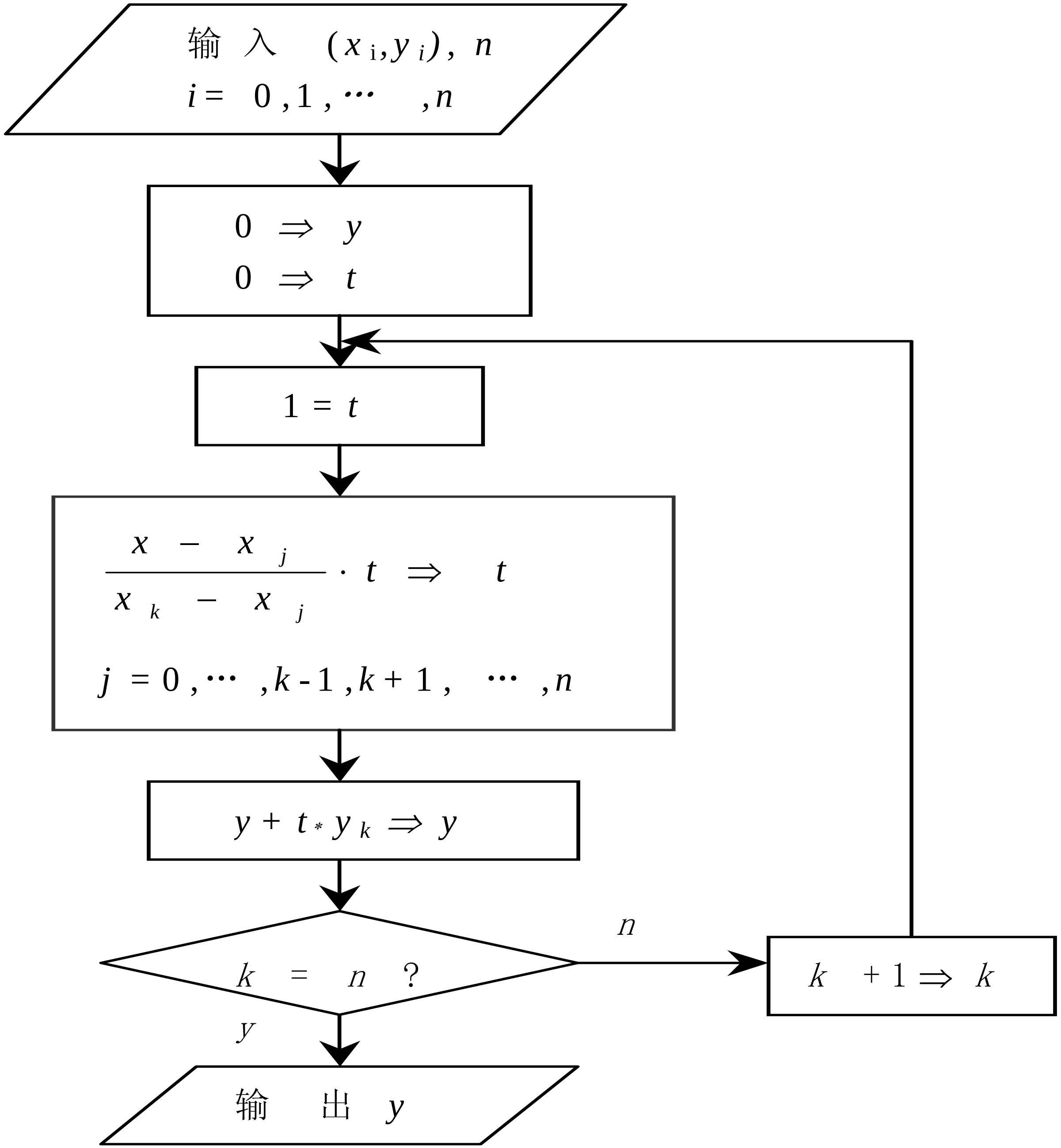
$$\max_{0.4\le x\le 0.8}\left|f^{4}(x)\right|\le 234.4,$$

利用余项估计式(2.1.11)可以得到

$$\left|R_3(x)\right|\le 0.004$$

In(0.60)的真值为-0.510826，由此得出 $R_3(0.6)=-0.00085$。这个例子说明，估计式(2.1.11)给出了一个较好的估计。

拉格朗日插值算法实现



输 入 (x_i, y_i), n
$i = 0, 1, \cdots, n$
$0 \Rightarrow y$
$0 \Rightarrow t$
$1 = t$
$\frac{x - x_j}{x_k - x_j} \cdot t \Rightarrow t$
$j = 0, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n$
$y + t * y_k \Rightarrow y$
$k = n$?
n
$k + 1 \Rightarrow k$
y
输 出 y

2.1.3 均差和Newton插值多项式

Lagrange 插值虽然易算，但若要增加一个节点时，全部基函数 $l_i(x)$ 都需要重新计算。

能否重新在P_n中寻找新的基函数？

希望每加一个节点时，只附加一项上去即可。

下面主要讨论

- **Newton插值多项式的构造**
- 差商的定义及性质
- 差分的定义及性质
- 等距节点的**Newton**插值公式

1. Newton插值多项式的构造

由线性代数知, 任何一个不高于n次的多项式, 都可以表示成函数

$$1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1), \cdots, (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

的线性组合, 也就是说, 可以把满足插值条件 $\boldsymbol{p(x_i)=y_i}$ **(i=0,1,…,n)**的n次插值多项式, 写成如下形式

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

其中$\boldsymbol{a_k}$ **(*k*=0,1,2,…,*n*)**为待定系数,这种形式的插值多项式称为**Newton**插值多项式。我们把它记为$\boldsymbol{N_n(x)}$即

$$N_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

它满足

$$N_n(x) = N_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

其中a_k (**k=0,1,2,…,n**) 为待定系数，形如上式的插值多项式称为牛顿(Newton)插值多项式。

因此，每增加一个结点，Newton插值多项式只增加一项，克服了Lagrange插值的缺点。

$$N_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

问题：如何由插值条件

$$N_n(x_i)=y_i,\quad (i=0,1,\cdots,n)$$

确定其中待定系数$a_0,a_1,\cdots,a_n$？

当$x=x_0$时，$N_n(x_0)=a_0=f_0$.

当$x=x_1$时，$N_n(x_1)=a_0+a_1(x-x_0)=f_1$，推得 $a_1=\dfrac{f_1-f_0}{x_1-x_0}$.

当$x = x_2$时, $N_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f_2$,

推得 $$a_2 = \frac{\dfrac{f_2 - f_0}{x_2 - x_0} - \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}.$$

依此递推得到$a_3, \cdots, a_n$. 为写出系数a_k的一般表达式，引进差商定义.

自变量之差和因变量之差之比叫差商

2. 差商（均差的定义及性质）

已知 $y=f(x)$ 函数表

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_n)$

$(x_i \neq x_j, \quad i \neq j)$

则 在 $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x$ 上平均变化率分别为： **4.1**

定义为 $f(x)$ 的差商

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0},\quad f[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

$$\cdots \quad f[x_{n-1},x_n]=\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}.$$

即有定义：

定义 函数$y=f(x)$在区间$[x_i, x_{i+1}]$上的平均变化率

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

称为$f(x)$关于x_i, x_{i+1} 的一阶差商,并记为$f[x_i, x_{i+1}]$

二阶差商

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

*m*阶差商

$$f[x_0, x_1, \cdots x_m] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots x_m] - f[x_0, x_1, \cdots x_{m-1}]}{x_m - x_0}$$

差商的性质

$f[x_i, x_j, x_k]$是指

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$$

例如：$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$

一般的,可定义区间$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}]$上的n阶差商为

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$$

差商表

x_i	$f(x_i)$ (0 阶差商)	一阶差商	二阶差商	三阶差商	k 阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
x_k	$f(x_k)$	$f[x_{k-1},x_k]$	$f[x_{k-2},x_{k-1},x_k]$	$\cdots$	$\cdots$ $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$
$\vdots$	$\vdots$				

计算顺序：即每次用前一列同行的差商与前一列上一行的差商再作差商。

例1 求 $f(x_i)= x^3$在节点 x=0, 2, 3, 5, 6上的各阶差商值

解：计算得如下表

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+2}]$
0	0			
2	8	$\frac{8-0}{2-0}=4$		
3	27	$\frac{27-8}{3-2}=19$	$\frac{19-4}{3-0}=5$	
5	125	$\frac{125-27}{5-3}=49$	$\frac{49-19}{5-2}=10$	$\frac{10-5}{5-0}=1$
6	216	$\frac{216-125}{6-5}=91$	$\frac{91-49}{6-3}=14$	$\frac{14-10}{6-2}=1$

性质1 函数 $f(x)$ 的 n 阶差商 $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ 可由函数值 $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ 的线性组合表示，且

$$f[x_0,x_1,\cdots x_n]=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)} \qquad 其中\omega'(x_k)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

这个性质可用数学归纳法证明

证明: 数学归纳法

当$k=1$时, $f[x_0,x_1]=\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}=\dfrac{f[x_0]}{x_0-x_1}+\dfrac{f[x_1]}{x_1-x_0}$, 命题成立.

设$k=m-1$时, 命题成立, 即

$$f[x_0,\cdots,x_{m-1}]=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_{m-1})}$$

和

$$f[x_0,\cdots,x_{m-2},x_m]=\sum_{\substack{j=0\\ j\neq m-1}}^{m}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_m)}$$

设$k=m-1$时，命题成立，即

$$f[x_0,\cdots,x_{m-1}]=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_{m-1})}$$

和

$$f[x_0,\cdots,x_{m-2},x_m]=\sum_{\substack{j=0\\ j\neq m-1}}^{m}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_m)}$$

由m阶差商定义和上面两式知

$$f[x_0,\cdots,x_m]=\{f[x_0,\cdots,x_{m-2},x_m]-f[x_0,\cdots,x_{m-1}]\}\frac{1}{x_m-x_{m-1}}$$

$$=\sum_{j=0}^{m-2}\frac{f(x_j)\left(\dfrac{1}{x_j-x_m}-\dfrac{1}{x_j-x_{m-1}}\right)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_{m-2})}\frac{1}{x_m-x_{m-1}}$$

$$+\frac{f(x_m)}{(x_m-x_0)\cdots(x_m-x_{m-2})}\frac{1}{x_m-x_{m-1}}$$

$$-\frac{f(x_{m-1})}{(x_{m-1}-x_0)\cdots(x_{m-1}-x_{m-2})}\frac{1}{x_m-x_{m-1}}$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_m)}$$

于是，当$k=m$时命题成立. 归纳法完成.

性质2 差商具有对称性，即在k阶差商中 $f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$ **任意交换两个节点** x_i **和** x_j **的次序，其值不变。**

例如

$$f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\|$$

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_1, x_2, x_0] = f[x_0, x_2, x_1] = \cdots$$

3 牛顿插值多项式的推导

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_n)$

$(x_i \neq x_j,\ i \neq j)$

已知 $y=f(x)$ 函数表（4.1），由差商定义及对称性，得

$$f[x,x_0]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \Rightarrow f(x)=f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0) \quad (a)$$

$$f[x,x_0,x_1]=\frac{f[x,x_0]-f[x_0,x_1]}{x-x_1} \quad \Rightarrow f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+f[x,x_0,x_1](x-x_1) \quad (b)$$

$$f[x,x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x,x_0,x_1]-f[x_0,x_1,x_2]}{x-x_2}$$

$$\Rightarrow f[x,x_0,x_1]=f[x_0,x_1,x_2]+f[x,x_0,x_1,x_2](x-x_2) \quad (c)$$

$\cdots\cdots$

$$f[x,x_0,\cdots,x_n]=\frac{f[x,x_0,\cdots,x_{n-1}]-f[x_0,x_1,\cdots,x_n]}{x-x_n}$$

$$\Rightarrow f[x,x_0,\cdots,x_{n-1}]=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+f[x,x_0,\cdots,x_n](x-x_n) \quad (d)$$

抵消

$$f(x)=f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0)\quad(a)$$

$$f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+f[x,x_0,x_1](x-x_1)\quad(b)\qquad\times(x-x_0)$$

$$f[x,x_0,x_1]=f[x_0,x_1,x_2]+f[x,x_0,x_1,x_2](x-x_2)\quad(c)\qquad\times(x-x_0)(x-x_1)$$

……

$$f[x,x_0,\cdots,x_{n-1}]=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+f[x,x_0,\cdots,x_n](x-x_n)\quad(d)$$

$$\times(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

将(b)式两边同乘以$(x-x_0)$，(c)式两边同乘以$(x-x_0)(x-x_1)$ ……
(d)式两边同乘以$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$，把所有式子相加，得

$$\begin{aligned}f(x)=&f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\\&+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\\&+f[x,x_0,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)\end{aligned}$$

$$f(x)= N_n(x) + R_n(x)$$

记

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) +\cdots+f\left[x_0,x_1,\cdots,x_n\right](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

--- 牛顿插值多项式

$$R_n(x)=f[x,x_0,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n) =f[x,x_0,\cdots,x_n]\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)$$

--- 牛顿插值余项

可以验证 $f(x_i)=N_n(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$ ，即 $N_n(x)$满足插值条件，因此可得以下结论。

定理6（牛顿插值多项式）已知 $y=f(x)$ 函数表

$$(x_i, f(x_i))(i=0,1,\cdots,n);(x_i \neq x_j,\quad i \neq j)$$

则满足插值条件 $f(x_i)=N_n(x_i),(i=0,1,\cdots,n)$ 的插值多项式

牛顿插值多项式系数

$$f(x)=N_n(x)+R_n(x)$$

$f(x_0)$ $f[x_0,x_1]$ $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$

其中，$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$

--- 牛顿插值多项式

$$R_n(x)=f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

--- 牛顿插值余项

练习 设当$x_i=1,2,3,4,5$时，$f(x_i)=1,4,7,8,6$. 求四次牛顿插值多项式 .

k	x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
0	1	1				
1	2	4	3			
2	3	7	3	0		
3	4	8	1	-1	-1/3	
4	5	6	-2	-3/2	-1/6	1/24

$$N_4(x)=1+(x-1)\cdot 3+(x-1)(x-2)\cdot 0+$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)\cdot(-\tfrac{1}{3})+(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\cdot(\tfrac{1}{24})$$

$$=\frac{1}{24}x^4-\frac{9}{12}x^3+\frac{83}{24}x^2-\frac{33}{12}x+1$$

例2 给定$f(x)$的函数表，求四次牛顿插值多项式，计算$f(0.596)$的近似值，估计误差.

做出差商表，得到

$$N_4(x)=0.41075+1.116(x-0.4)+0.28(x-0.4)(x-0.55)$$
$$+0.19733(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)$$
$$+0.03134(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)(x-0.8),$$

$$f(0.596)\approx N_4(0.596)=0.63192,$$

$$R_4(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_4)f[x,x_0,x_1,\cdots,x_4],$$

$$|R_4(x)|\approx|f[x_0,x_1,\cdots,x_5]\omega_5(0.596)|\le 3.63\times 10^{-9}.$$

或由$x=0.596$和$f(x)\approx 0.63192$，得$f[x,x_1,\cdots,x_4]$的近似值.

性质3 n阶差商 $f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ 和n阶导数之间有下列关系

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \qquad \xi \in (\min_{0\le i\le n} x_i, \max_{0\le i\le n} x_i)$$

这个性质可直接用罗尔（Rolle）定理证明

证明：余项

$R(x) = f(x) - N(x) \Rightarrow R(x_i) = f(x_i) - N(x_i) = 0 \quad i=0,1,\ldots,n$

即$R(x)$在$[x_0, x_n]$有n+1个零点，根据罗尔定理$R^{(n)}(x)$在$[x_0, x_n]$有1个零点，设为ξ，即有

$$R_n^{(n)}(\xi)=0$$

$$R_n^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-N_n^{(n)}(x)$$

$$=f^{(n)}(x)-\{f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]$$

$$+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]$$

$$+\ldots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\ldots,x_n]\}^{(n)}$$

$$=f^{(n)}(x)-n!\,f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$$

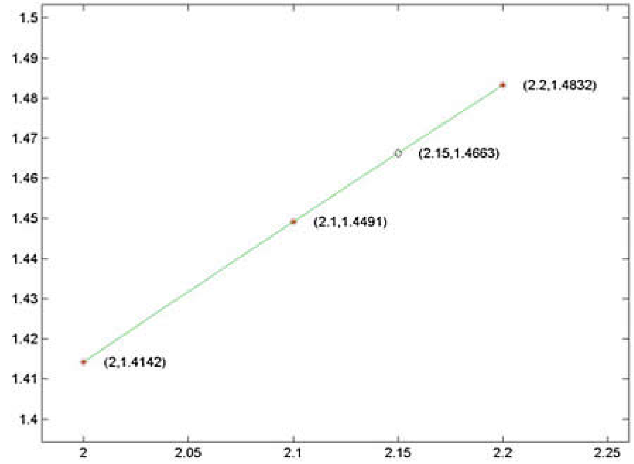
$$\begin{cases} R_n(x_i)=0 & (i=0,1,..,n) \\ R'_n(\xi_i)=0 & (i=0,1,..,n-1) \\ \vdots & \vdots \\ R_n^{(n)}(\xi)=0 & (\xi\in[x_0,x_1,\ldots,x_n]) \end{cases}$$

$$R_n^{(n)}(\xi)=0=f^{(n)}(\xi)-n!\,f[x_0,x_1,\ldots,x_n$$

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n)!}$$

例3 设$f(x)=\sqrt{x}$，并已知$f(x)$的数据如表2-3。

试用二次Newton插值多项式 $N_2(x)$计算$f(2.15)$的近似值讨论其误差。



函数$f(x)=\sqrt{x}$的图象

表2-3

X	2.0	2.1	2.2
$\sqrt{x}$	1.414214	1.449138	1.483240

解　先均差表，具体数据如表**2-4**。

表**2-4**

x_k	$f(x_k)$	一阶均差	二阶 均差
2.0	1.414214		
2.1	1.449138	0.34924	
2.2	1.483240	0.34102	-0.04110

利用**Newton**插值公式有

$$N_2(x) = 1.414214 + 0.34924(x-2.0) - 0.04110(x-2.0)(x-2.1).$$

取**x= 2.15**得 $N_2(2.15) = 1.466292.$

注意到

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}, \quad \max_{2.0\le x\le 2.2} \left| f^{(3)}(x) \right| = 0.06629,$$

可以得出

$$\max_{2\le x\le 2.2}\left|f(x)-N_2(x)\right|\le 0.552417\times 10^{-5}.$$

事实上，**f(2.15)**的真值为**1.466288,**由此得出 $R(2.15)=-0.4\times10^{-5}$。由此看出，所得结果是满意的。

利用**Newton**插值公式，还可以方便地导出某些带导数的插值公式，如下例。

例4 已知函数**f(x)**的如下值:

$$f(-1)=-2 \quad f(2)=-1 \quad f(1)=0 \quad f'(0)=0.$$

$$f(-1)=-2 \quad f(2)=-1 \quad f(1)=0 \quad f'(0)=0.$$

求不超过3次的多项式$P_3(x)$，使得满足插值条件：

$$P_3(-1)=f(-1),\quad P_3(0)=f(0),\quad P_3(1)=f(1),\quad P_3'(0)=f'(0).$$

解 记 $x_0=-1,\ x_1=0,\ x_2=1$,构造不超过3次的多项式

$$P_3(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+\alpha(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),$$

其中，前三项是通过三个插值点的2次Newton插值$N_2(x)$,从而$P_3(x)$满足三个函数的插值条件。α 是待定常数，由x_1 =0处的导数值条件确定。

易知，其中的均差

$$f[x_0,x_1]=f[x_1,x_2]=1,\quad f[x_0,x_1,x_2]=0$$

从而

$$P_3(x)=-2+(x+2)+\alpha x(x^2-1).$$

由 $P_3'(0)=0$，得 $\alpha=1$，所以问题的解是 $P_3(x)=x^3-1$。

例5 已知 $f(x) = x^7 + x^4 + 3x + 1$

求 $f[2^0, 2^1, \ldots 2^7]$ 及 $f[2^0, 2^1, \ldots 2^7, 2^8]$

分析：本题 $f(x)$是一个多项式, 故应利用差商的性质

解: 由差商与导数之间的关系

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

及 $f^{(7)}(x) = 7!$, $f^{(8)}(x) = 0$ 知

$$f[2^0, 2^1, \cdots, 2^7] = \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!} = \frac{7!}{7!} = 1$$

$$f[2^0, 2^1, \cdots, 2^7, 2^8] = \frac{f^{(8)}(\xi)}{8!} = \frac{0}{8!} = 0$$

3 差分和等距节点插值公式

（1） 差分及性质

点等距分布的情形。引入差分作为工

给定 $y=f(x)$ 的函数表

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_n)$

且 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, $x_k-x_{k-1}=h>0,(k=1,2,\cdots,n)$， 即 $h=\dfrac{b-a}{n}$,

$x_k=x_0+kh,(k=0,1,\cdots,n)$, 并记 $f(x_k)=f_k,(k=0,1,\cdots,n)$

1、差分

定义 记号 $\Delta f_k\equiv\Delta f(x_k)=f(x_k+h)-f(x_k)\equiv f_{k+1}-f_k$,

$\nabla f_k=f(x_k)-f(x_k-h)\equiv f_k-f_{k-1}$, $\delta f_k=f(x_k+\frac{h}{2})-f(x_k-\frac{h}{2})\equiv f_{k+\frac{1}{2}}-f_{k-\frac{1}{2}}$,

分别称为 $f(x)$ 在 $x=x_k$ 点的步长为 h 的一阶向前、向后、中心差分.

Δ — 向前差分算子; ∇ — 向后差分算子; δ — 中心差分算子.

利用一阶差分，可定义二阶差分为

$$\Delta^2 f_k \equiv \Delta(\Delta f_k) = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k$$

$$= f_{k+2} - 2 f_{k+1} + f_k$$ —二阶向前差分；

$$\nabla^2 f_k \equiv \nabla(\nabla f_k) = \nabla f_k - \nabla f_{k-1}$$

$$= f_k - 2 f_{k-1} + f_{k-2}$$ —二阶向后差分；

一般地，可定义m 阶差分为

$$\Delta^m f_k = \Delta(\Delta^{m-1} f_k) = \Delta^{m-1}\Delta f_k = \Delta^{m-1} f_{k+1} - \Delta^{m-1} f_k$$

— m 阶向前差分；

$$\nabla^m f_k = \nabla(\nabla^{m-1} f_k) = \nabla^{m-1}\nabla f_k = \nabla^{m-1} f_k - \nabla^{m-1} f_{k-1}$$

— m阶向后差分；

若一阶中心差分

$$\delta f_{k+\frac{1}{2}} = f_{k+1} - f_k,$$

$$\delta f_{k-\frac{1}{2}} = f_k - f_{k-1},$$

则二阶中心差分为

$$\delta^2 f_k \equiv \delta f_{k+\frac{1}{2}} - \delta f_{k-\frac{1}{2}}$$

$$= f_{k+1} - 2 f_k + f_{k-1}$$

$$\nabla^m f_k = \nabla^{m-1} f_k - \nabla^{m-1} f_{k-1},$$

$$\delta^m f_k = \delta^{m-1} f_{k+\frac{1}{2}} - \delta^{m-1} f_{k-\frac{1}{2}}$$

并规定 $\Delta^0 f_k = \nabla^0 f_k = \delta^0 f_k = f_k$ ，称其为零阶差分。

为了讨论差分的性质，再引入两个常用的算子符号。

$$Ef_k = f_{k+1}, \quad E^{-1} f_k = f_{k-1}, \quad If_k = f_k .$$

称 E为步长h 的移位算子，I为单位算子（也称不变算子）。

由差分定义并应用符号运算，可得下列差分的基本性质。

（1）函数值与差分可以表示。例如

$$f_{k+n} = E^n f_k = (I+\Delta)^n f_k = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i f_k \qquad (2.1.20)$$

$$\Delta^n f_k = (E-I)^n f_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} f_{n+k-i} \qquad (2.1.21)$$

$$\nabla^n f_k = (I-E^{-1})^n f_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f_{k+i-n} \qquad (2.1.22)$$

其中 $\binom{n}{i}=\dfrac{n!}{i!(n-i)!}$ 为二项式展开系数。

（2） 对于$k\geq 0$有

$$f[x_0,x_1,\cdots x_k]=\frac{1}{k!h^k}\Delta^k f_0 \qquad (2.1.23)$$

该式用数学归纳法证明。

(3) 设$f\in C^k[x_0,x_0+kh]$， 则有

$$\Delta^k f_0=h^k f^{(k)}(\xi),\xi\in(x_0,x_k). \qquad (2.1.24)$$

该式可有（**2.1.14**）和（**2.1.23**）得到。

下面利用差分构造等距节点插值公式。在**Newton**插值公式（**2.1.15**）中，用差分代替均差就可以得到等距节点插值公式。这里只推导常用的前插公式和后插公式。

设 $f_k=f(x_0+kh)(k=0,1,\cdots,N)$ 为已知，要计算x0附近点 $x=x_0+th(0\le t\le 1)$ 处f(x)的近似值。插值节点应取 $x_0,x_1,\cdots,x_n(n\le N)$。于是

$$\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)=t(t-1)\cdots(t-k)h^{n+1}.$$

将此式及（2.1.23）代入Newton插值公式（2.1.15），可得到

$$N_n(x_0+th)=f_0+t\Delta f_0+\frac{1}{2!}t(t-1)\Delta^2 f_0+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}t(t-1)\cdots(t-n+1)\Delta^n f_0. \qquad (2.1.25)$$

此公式称为**Newton向前插值公式**。利用二项公式系数的记号，可以把公式（2.1.25）写成

$$N_n(x_0+th)=\sum_{k=0}^{n}\binom{t}{k}\Delta^k f_0。$$

其余项可由（2.1.16）直接得到

$$R_n(x)=\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi),\xi\in(x_0,x_n). \qquad （2.1.26）$$

类似地，可以导出Newton向后插值公式。设 $x = x_N + th(-1 \le t \le 0)$，在Newton插值公式中用$x_N$代替$x_0$，用$x_{N-1}$代替$x_1$，…，用$x_{N-k}$代替$x_k$，这样可以得到

$$N_n(x_N + th) = f_N + t\nabla f_N + \frac{1}{2!}t(t+1)\nabla^2 f_N + \cdots + \frac{1}{n!}t(t+1)\cdots(t+n-1)\nabla^n f_N。\qquad (2.1.17)$$

此公式称为**Newton向后插值公式**。把二项式系数扩大到包含负数的情形，记

$$\binom{-t}{k} = \frac{-t(-t-1)\cdots(-t-k+1)}{k!},$$

则有

$$\binom{-t}{k} = (-1)^k \frac{t(t+1)\cdots(t+k+1)}{k!}.$$

此式可表示为

$$N_N(x_N + th) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-t}{k} \nabla^k f_N.$$

其余项为

$$R_n(x)=\frac{t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi),\xi\in(x_{N-k},x_N). \qquad (2.1.28)$$

例 2.4 设x_0=1.0,h=0.05,给出 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $x_k=x_0+kh(k=0,1,\cdots,6)$ 处的函数值如表2-5的第3列，试用三次等距节点插值公式求f(1.01)和f(1.28)的近似值。

表2-5

k	x_k	f_k	Δ	Δ^2	Δ^3
0	1.00	1.00000	0.02470		
1	1.05	1.02470	0.02411	-0.00059	
2	1.10	1.04881	0.02357	-0.00054	-0.00005
3	1.15	1.07238	……	……	……
4	1.20	1.09544	0.02307	-0.00048	-0.00003
5	1.25	1.11803	0.02259	-0.00045	
6	1.30	1.14017	0.02214		
			∇	∇^2	∇^3

解　用Newton向前插值公式（2.1.25）来计算f(1.01)的近似值。先构造与均差表相似的差分表，见表2-5得上半部分。由$t=(x-x_0)/h=0.2$的得

$$f(1.01) \approx N_3(1.01) = 1.00499.$$

用Newton向后插值公式（2.1.27）计算f(1.28)的近似值，可利用表2-5中的下半部分。由$t=(x-x_6)/h=-0.4$，得

$$f(1.28) \approx N_3(1.28) = 1.13137.$$

事实上，f(1.01)和f(1.28)的真值分别为1.00498756和1.13137085。由此看出，计算结果是相当精确的。

例 2.5　已知f(x)=sinx的数值如表2-6的第2列，分别用Newton向前、向后插值公式求sin0.57891的近似值。

表2-6

x	sinx	△	$\triangle^2$	$\triangle^3$
0.4	0.38942			
0.5	0.47943	0.09001		
0.6	0.56464	0.08521	0.00480	
0.7	0.64422	0.07958	-0.00563	-0.00083

解　作差分表如表**2-6**，使用**Newton**向前差分公式

$x_0=0.5, x_1=0.6, x_2=0.7, x=0.57891, h=0.1$，则$t=(x-x_0)/h=0.7891$,

$$N_2(0.57891) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{1}{2}t(t-1)\Delta^2 f_0$$

$$= 0.47934 + 0.08521t + \frac{1}{2}t(t-1)\times(-0.00563)$$

$$= 0.54714,$$

即**sin0.57891≈0.54714**。误差为

$$R_2(x)=\frac{h^3}{3!}t(t-1)(t-2)(-\cos\xi),0.5<\xi<0.7,$$

$$|R_2(x)|\le 3.36\times 10^{-5}|\cos 0.5|=2.95\times 10^{-5}.$$

若用Newton向后插值公式，则可取

x_0=0.4,x_1=0.5,x_2=0.6,x=0.57891,

h=0.1,t=(x-x_2)/h=-0.2109。于是

$$N_2(0.57891)=f_2+t\nabla f_2+\frac{1}{2}t(t-1)\nabla^2 f_2$$

$$=0.56464+0.08521t+\frac{1}{2}t(t+1)\times 0.00480$$

$$=0.54707,$$

即sin0.57891≈0.54707。误差为

$$R_2(x)=\frac{h^3}{3!}t(t+1)(t+2)(-\xi),0.4<\xi<0.6,$$

$$|R_2(x)|\le 4.57\times 10^{-5}.$$

2.1.4 Hermite插值多项式

Hermite 插值是带导数的插值。除了要求插值多项式与被插值函数在插值节点上取值相等外，还要求在节点上它们的导数值也相等，甚至要求高阶导数也相等。 下面只讨论在插值节点上函数值和函数的一阶导数值都给定的情形。

设在**n+1**个不同点的插值节点 $x_0, x_1, \cdots x_n$上，给定 $y_i = f(x_i), m_i = f'(x_i),\ i = 0, 1, \cdots n$ 。要求一个次数不超过**2n+1**的多项式$H_{2n+1}(x)$,试的满足插值条件

$$H_{2n+1}(x_i) = y_i \quad H'_{2n+1}(x_i) = m_i, \quad i = 0,1,\cdots n. \qquad (2.1.29)$$

满足这种插值条件的多项式称为**Hermite**插值多项式。

Hermite 插值多项式可以用类似于求**Lagrange** 插值多项式的方法给出，这种插值多项式是唯一存在的。

先求出插值基函数 $\alpha_i(x), \beta_i(x), i = 0,1,\cdots n$,每个基函数为**2n+1**次多项式，并且满足如下条件

$$\begin{cases}\alpha_i(x_k)=\delta_{ik}, \alpha'_i(x_k)=0\\ \beta_i(x_k)=0, \beta'_i(x_k)=\delta_{ik}, k=0,1,\cdots n.\end{cases} \quad (2.1.30)$$

利用 $\alpha_i(x), \beta_i(x), i=0,1,\cdots n$，构造多项式

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}[y_i\alpha_i(x)+m_i\beta_i(x)]. \quad (2.1.31)$$

这是一个次数不超过2n+1的多项式，有条件（2.1.30）知$H_{2n+1}(x)$是满足插值条件（2.1.29）的Hermite 插值多项式。

$$\alpha_i(x), \beta_i(x), i=0,1,\cdots n,$$

$$\alpha_i(x)=(ax+b)l_i^2(x), \quad i=0,1,\cdots,n,$$

其中$l_i(x)$为Lagrange插值基函数，有（2.1.5）给出。有条件(2.1.30)得

$$\begin{cases}ax_i+b=1,\\ a+2l'_i(x_i)=0.\end{cases} \quad (2.1.32)$$

由此得

$$\alpha_i(x)=[1-2(x-x_i)l'_i(x_i)]l_i^2(x), i=0,1,\cdots n. \qquad (2.1.32)$$

同理可得

$$\beta_i(x)=(x-x_i)l_i^2(x), i=0,1,\cdots n. \qquad (2.1.33)$$

下面讨论唯一性问题，设还有一个次数不超过2n+1的多项式 $G_{n+1}(x)$满足插值条件（2.1.29）。令 $R(x)=H_{2n+1}(x)-G_{2n+1}(x)$ ，则由（2.1.29）有

$$R(x_i)=R'(x_i)=0, i=0,1,\cdots n.$$

因此，R(x) 是一个次数不超过2n+1的多项式，且它有n+1个二重根 $x_0,x_1,\cdots,x_n$。所以，必有R(x)=0,即$H_{2n+1}(x)=G_{2n+1}(x)$。

仿照Lagrange 插值余项的证明方法，可得下面的余项定理

定理2.2　设$x_0,x_1,\cdots,x_n$为[a,b]上相异节点，$f(x)\in C^{2n+1}[a,b]$，并且 $f^{(2n+2)}(x)$ 在(a,b)内存在，$H_{n+1}(x)$是满足插值条件（2.1.29）的插值多项式，则对任何x∈[a,b],存在ξ∈(a,b),使得

$$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x). \qquad (2.1.34)$$

三次**Hermite** 插值多项式在应用上特别重要，现列出它的计算公式。取节点x_k和x_{k+1},三次**Hermite**插值多项式$H_3(x)$满足插值条件

$$H_3(x)=y_i,\quad H'_3(x_i)=m_i,\quad i=k,k+1. \qquad (2.1.35)$$

相应的插值基函数为

$$\begin{cases}\alpha_k(x)=\left(1+2\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\dfrac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2,\\ \alpha_{k+1}(x)=\left(1+2\dfrac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)\left(\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\beta_k(x)=(x-x_k)\left(\dfrac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2,\\ \beta_{k+1}(x)=(x-x_{k+1})\left(\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2.\end{cases}$$

于是，插值多项式为

$$H_3(x)=y_k\alpha_k(x)+y_{k+1}\alpha_{k+1}(x)+m_k\beta_k(x)+m_{k+1}\beta_{k+1}(x). \qquad (2.1.38)$$

其余项$R_3(x)=f(x)-H_3(x)$，由（2.1.34）得

$$R_3(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2, \qquad (2.1.39)$$

其中ξ位于x_k,x_{k+1}和x 所界定的范围内。

例 2.6 设f(x)=lnx，给定f(1)=0, f(2)=0.693147, f'(1)=1, f'(2)=0.5。用三次Hermite插值多项式$H_3(x)$计算f(1.5)的近似值。

解 记$x_0=1,x_1=2$, 利用(2.1.36)和(2.1.37)可得

$$\alpha_0(x)=(2x-1)(2-x)^2,\quad \alpha_1(x)=(5-2x)(x-1)^2,$$

$$\beta_0(x)=(x-1)(2-x)^2,\quad \alpha_0(x)=(x-2)(x-1)^2.$$

利用(2.1.38)得三次Hermite插值多项式

$$H_3(x)=0.693147(5-2x)(x-1)^2 \\ +(x-1)(2-x)^2+0.5(x-2)(x-1)^2.$$

由此得f(1.5)的近似值$H_3(1.5)=0.409074$