习题2

2.1 已知 $f(1)=0, f(-1)=-3, f(2)=4$ 。求函数$f(x)$过这三点的二次**Lagrange**插值多项式 $L_2(x)$。

2.2 已知函数Inx的数据如下表，分别用线性插值和二次插值求 $In\ (0.54)$的近似值。

x	0.5	0.6	0.7
$f(x)$	-0.693147	-0.510826	-0.356675

2.3 设$\{x_i\}_{i=0}^{m}$为互异的插值节点，求证

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^k l_i(x) = x^k, k=0,1,\cdots,n,$$

其中 $l_i(x)$ 为 n 次**Lagrange**插值基函数。

2.4 设 $f(x)\in C^2[a,b]$,且 $f(a)=f(b)=0$ ，求证

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

2.5 设 $f(x)=(3x-2)e^x$. 求函数 $f(x)$ 的关于节点 $x=1,1.05,1.07$ 的二次**Lagrange**插值多项式 $L_2(x)$，并估计误差 $R_2(1.03)$。

2.6 给定数据如下表。用**Newton**插值公式求三次插值多项式 $N_3(x)$。

x	1	1.5	0	2
$f(x)$	1.25	2.50	1.00	5.50

2.7 设 $f(x)=x^7+x^4+x+1$，求函数 $f[2^0,2^1,\cdots,2^7]$ 和 $f[2^0,2^2,\cdots,2^8]$。

2.8 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 有 n 个不同的实根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，求证

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{f'(x_i)}=\begin{cases}0, & 0\le k\le n-2,\\ a_n^{-1}, & k=n-1.\end{cases}$$

2.9 证明 $\sum_{i=0}^{n-1}\Delta^2 y_i=\Delta y_n-\Delta y_0$。

2.10 在$-4\le x\le 4$上给出$f(x)=e^x$的等距节点函数表。若用二次插值求e^x的近似值，要使截断误差不超过10^{-6}，问使用函数表的步长h应取多少？

2.11 求不超过四次的多项式$P(x)$，使它满足插值条件

$$P(0)=P'(0)=0,\quad P(1)=P'(1)=1, P(2)=1$$

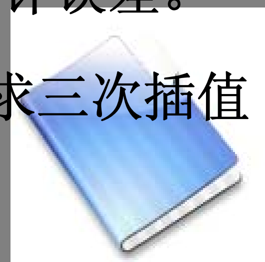
2.12 求不超过三次的多项式$H(x)$，使它满足插值条件

$$H(-1)=-9, H'(-1)=15,\quad H(1)=1, H'(1)=-1。$$

2.13 求$f(x)=x^2$在$[a,b]$上的分段线性插值函数$I_n(x)$，并估计误差。

2.14 求$f(x)=x^4$在$[a,b]$上的分段三次Hermite插值函数，并估计误差。

2.15 已知函数的数据如下表，用三弯矩算法在第一类边界条件下求三次插值多项式$S(x)$。



x	-1	0	1
$f(x)$	$5/3$	0	1
$f'(x)$	-1		7

2.16 已知点集 $\{x_i\}_{i=0}^{4}=\{-2,-1,0,1,2\}$ 和权数 $\{w_i\}_{i=0}^{4}=\{0.5,1,1,1,1.5\}$ 试用三项递推公式构造对应的正交多项式 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 。

2.17 求参数 α 和 β ，使积分 $\int_0^{\pi/2}(\sin x-\alpha-\beta x)^2dx$ 最小。

2.18 用 **Legendre**多项式求 $f(x)=\sqrt{x}$ 在区间 $[0,1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式。

2.19 用 **Chebyshev**多项式求 e^x 在区间 $[-1,1]$ 上的一次和三次最佳平方逼近多项式。

2.20 观察物体的运动，得出数据如下表，求运动方程 $S=at+b.$

时间 t/s	0.0	0.9	1.9	3.0	3.9	5.0
距离 S/m	0	10	30	50	80	110

2.21 已知离散数据如下表，用非线性模型 $\varphi(x)=ax+\beta e^{-x}$ 作最小二乘法，并求平方误差 $\|\delta\|_2^2$。

x_i	0.0	0.5	1.0	1. 5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
y_i	4.000	2.927	2.470	2.939	2.540	2.829	3.198	3.62	4.072

2.22 对于例**2.14**给出的离散数据 $\{x_i, y_i\}_{i=0}^{9}$，用非线性模型 $\varphi(x)=\dfrac{x}{\alpha x+\beta}$ 作曲线拟合，把它转化成线性模型，求 α，β 和平方误差 $\|\delta\|_2^2$。