1.4 向量和矩阵的范数

版权所有：中南大学数学院

1.4 向量和矩阵的范数

学习目标:
掌握向量范数、矩阵范数等概念。

版权所有：中南大学数学院

§1.4 向量和矩阵范数

在实数域中，数的大小和两个数之间的距离是通过绝对值来度量的。在解析几何中，向量的大小和两个向量之差的大小是“长度”和“距离”的概念来度量的。为了对矩阵运算进行数值分析，我们需要对向量和矩阵的“大小”引进某种度量。范数是绝对值概念的自然推广。

"范数"是对向量和矩阵的一种度量, 实际上是二维和三维向量长度概念的一种推广.

数域:数的集合, 对加法和乘法封闭　有理数、实数、复数数域

线性空间:可简化为向量的集合, 对向量的加法和数量乘法封闭, 也称为向量空间

➤ 1.4.1 向量范数 (vector norms)

定义1 如果向量 $x \in R^n$ 的某个实值函数 $f(x) = \|x\|$ 满足：

（**1**）正定性：$\|x\| \geq 0$，且 $\|x\| = 0$ 当且仅当**x=0**；

（**2**）齐次性：对任意实数 α，都有 $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

（**3**）三角不等式：对任意 x，$y \in R^n$，都有 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

则称 $\|x\|$ 为 R^n 上的一个向量范数。

在向量空间 $R^n(C^n)$中，设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

常用的向量 $\boldsymbol{x}$的范数有

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=(\ |\boldsymbol{x}_1|^2+|\boldsymbol{x}_2|^2+\cdots+|\boldsymbol{x}_n|^2\ )^{1/2}$$ x的2－范数或欧氏范数

$$\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$$ x的1－范数

$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$ x的∞－范数或最大范数

$$\|x\|_p=(\ |x_1|^p+|x_2|^p+\cdots+|x_n|^p\ )^{1/p}$$ x的p－范数，$p\ge 1$

自己证

容易验证，向量的∞范数和**1**范数满足定义**1.5**中的条件。对于**2**范数，满足定义**1.5**中的条件（**1**）和（**2**）是显然的，对于条件（**3**），利用向量内积的 **Cauchy-Schwarz**不等式可以验证。

显然 $\|x\|_1$ 和 $\|x\|_2$ 是 $\|x\|_p$ 在 $p=1$ 和 $p=2$ 时的特例

并且由于

$$\max_{1\le i\le n}|x_i| \le \left(|x_1|^p+|x_2|^p+\cdots+|x_n|^p\right)^{1/p} \le \left(n\max_{1\le i\le n}|x_i|^p\right)^{1/p}$$

$$= n^{1/p}\max_{1\le i\le n}|x_i| \to \max_{1\le i\le n}|x_i| \quad (p\to\infty)$$

$\|x\|_p \to \|x\|_\infty \ (p\to\infty$ 时$)$，所以 $\|x\|_\infty$ 也是 $\|x\|_p$ 的特例

且 $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$

定理1 $\displaystyle\lim_{p\to\infty}\|x\|_p = \|x\|_\infty$

版权所有：中南大学数学院

注意:一般有向量的等价关系

$$c_1 \|x\|_p \le \|x\|_q \le c_2 \|x\|_p \quad (p \ne q,\ p, q = 1,2,\infty;\ c_1, c_2 \in \boldsymbol{R}^+)$$

例 1 求下列向量的各种常用范数

$$x = (1, 4, 3, -1)^T$$

解:

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_4| = 9$$

$$\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_4|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le 4} |x_i| = 4$$

显然,本例中 $c_1 \|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le c_2 \|x\|_\infty$,即

$$1*4 \leqslant 9 \leqslant 9/4*4=9$$

版权所有：中南大学数学院

➢ 1.4.2 矩阵的范数(matrix norms)

定义2 如果矩阵$A \in R^{n\times n}$的某个实值函数$f(A)=\|A\|$ 满足

（1）正定性：$\|A\| \geq 0$且$\|A\| = 0$当且仅当$A = 0$；

（2）齐次性：对任意实数 α ，都有$\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$ ；

（3）三角不等式：对任意$A, B \in R^{n\times n}$ 都有$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

（4）相容性：对任意$A, B \in R^{n\times n}$; 都有$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

则称 $\|A\|$ 为$R^{n\times n}$上的一个矩阵范数

常用的矩阵范数

(1) $$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

A的每列绝对值之和的最大值， 称A的列范数

(2) $$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

A的每行绝对值之和的最大值， 称A的行范数

(3) $$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$ 称 A 的 2 – 范数

其中$\lambda_{max}(A^T A)$为$A^T A$的特征值的绝对值的最 大值

版权所有：中南大学数学院

例2 设n阶方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 类似向量的 2-范数

$$\text{设 } \|A\|_F=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{1/2}$$

不难验证其满足定义2的4个条件. 因此 $\|A\|_F$ 是一种矩阵范数

称为Frobenius范数, 简称F-范数.

$$(4)\ \text{设 } \|\boldsymbol{A}\|_F=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_{ij}^2\right)^{1/2}$$

称A的F-范数.

定义3 对于给定的向量范数 $\|\cdot\|_\upsilon$ 和矩阵范数 $\|\cdot\|_\mu$，若 $\forall x \in R^n, A \in R^{n\times n}$，都有

$$\|Ax\|_\upsilon \le \|A\|_\mu \|x\|_\upsilon$$

则称所给的向量范数 $\|\cdot\|_\upsilon$ 和矩阵范数 $\|\cdot\|_\mu$ 相容.

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2} \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \quad \le \|A\|_F$$

$$\|Ax\|_2 \le \|A\|_2 \|x\|_2 \le \|A\|_F \|x\|_2$$

因此 $\|A\|_F$ 与 $\|x\|_2$ 相容

例3 求矩阵A的各种常用范数

$$A=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}3\\ 4\\ 2\end{array}\\ \begin{array}{ccc}2 & 5 & 2\end{array} & \end{array}$$

解:

$$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \quad =\max_{1\le j\le n}\{2,5,2\}=5$$

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \quad =\max_{1\le i\le n}\{3,4,2\}=4$$

由于 $\|A\|_2 \quad =\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$

版权所有：中南大学数学院

因此先求$A^T A$的特征值

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

特征方程为

$$\det(\lambda I - A^T A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 9 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

可得$A^T A$的特征值为

$$\lambda_1 = 9.1428, \lambda_2 = 2.9211, \lambda_3 = 0.9361$$

$$\lambda_{\max}(A^T A) = 9.1428$$

版权所有：中南大学数学院

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \qquad = 3.0237$$

$$\|A\|_F = \sqrt{2+9+2}$$

定义4 设$A \in R^{n\times n}$的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,称

$$\rho(A)=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\}$$

为矩阵A的谱半径

显然 $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)} = \sqrt{\rho(A^TA)}$ 谱范数 **(spectral norm)**

对于某种向量范数 $\|x\|_\upsilon$和算子范数$\|A\|_\upsilon$,

$$\|Ax\|_\upsilon \le \|A\|_\upsilon \|x\|_\upsilon$$

而 $\|Ax\|_\upsilon = \|\lambda x\|_\upsilon = |\lambda|\cdot\|x\|_\upsilon$

因此 $|\lambda|\cdot\|x\|_\upsilon \le \|A\|_\upsilon\|x\|_\upsilon$

版权所有：中南大学数学院

即
$$|\lambda| \le \|A\|_{\upsilon}$$

所以
$$\rho(A) \le \|A\|_{\upsilon}$$

即矩阵A的谱半径不超过矩阵的任何一种算子范数

定理1. 设$\|\cdot\|$是$R^{n\times n}$上的一种算子范数，$A \in R^{n\times n}$，若A满足$\|A\| < 1$，则$I + A$非奇异，且

$$\|(I + A)^{-1}\| < \frac{1}{1 - \|A\|}$$

证明:略

版权所有：中南大学数学院

例4 设矩阵A与矩阵B是对称的，求证

$$\rho(A+B) \le \rho(A) + \rho(B)$$

证 因为 $A = A^T$,于是有

$$\|A\|_2^2 = \lambda_{\max}(A^T A) = \lambda_{\max}(A^2) = [\rho(A)]^2$$

即 $\|A\|_2 = \rho(A)$。同理 $\|B\|_2 = \rho(B)$。

由于 $A + B = (A+B)^T$ ，所以

$$\rho(A+B) = \|A+B\|_2 \le \|A\|_2 + \|B\|_2 = \rho(A) + \rho(B)$$

版权所有：中南大学数学院