习题1

1.1 已知 $e=2.71828\cdots$，问下列近似值有几位有效数字，相对误差界是多少？

（1）$x=e, x_A=2.7$ （2）$x=e, x_A=2.718$

（3）$x=e/100, x_A=0.027$ （4）$x=e/100, x_A=0.02718$

1.2 设原始数据的下列近似值每位都是有效数字：

$$x_1^*=1.1021, x_2^*=0.031, x_3^*=56.430$$

试计算（1）$x_1^*+x_2^*+x_3^*$，（2）x_2^*/x_3^*，并估计它们的相对误差界。

1.3 设x的相对误差界为 δ，求 x^n的相对误差界。

1.4 设x>0,x的相对误差界为 δ，求ln2的绝对误差界。

1.5 为了使计算球体的体积时的相对误差界不超过1%，问测量半径R时的允许相对误差界是多少？

1.6 三角函数值取四位有效数字，怎样计算 $1-\cos 2^0$ 才能保证精度？

1.7 设 $Y_0=28$，按递推公式

$$Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783},n=1,2,\cdots$$

计算。若取 $\sqrt{783}\approx 27.982$（五位有效数字），试问计算 Y_{100} 将有多大误差？

1.8 求解方程 $x^2+56x+1=0$，使其根至少具有四位有效数字？

1.9 正方形的边长大约为100cm，应怎样测量才能使其面积的误差不超过 $1cm^2$？

1.10 序列 $\{y_n\}$ 满足递推关系

$$y_n=10y_{n-1}-1,n=1,2,\cdots$$

若 $y_0=\sqrt{2}\approx 1.41$（三位有效数字），计算到 y_{10} 时的误差有多大？这个计算过程稳定吗？

1.11 对积分 $I_n=\int_0^1 x^n e^{x-1}dx,n=0,1\cdots$，验证 $I_0=1-e^{-1},I_n=1-nI_{n-1}$

若取 $e^{-1}\approx 0.3679$，按递推公式 $I_n=I-nI_{n-1}$，用四位有效数字计算 $I_0,I_1,\cdots,I_9$ 并证明这种算法是不稳定的。

1.12 反双曲正弦函数为 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$。如何计算 $f(x)$ 才能避免有效数字的损失？试计算 $f(30)$ 和 $f(-30)$（开方和对数用6位函数表）。

1.13 下列公式是否要做变换才能避免有效数字的损失？如何变换？

(1) $\sin x-\sin y$ (2) $\arctan x-\arctan y$

(3) $\sqrt{x+4}-2$ （4） $(e^{2x}-1)/2$

1.14 已知三角形面积 $s=\dfrac{1}{2}ab\sin C$，其中C为弧度，$0<C<\dfrac{\pi}{2}$，且测量a，b，c的误差分别为 $\Delta a,\Delta b,\Delta c$，证明面积的误差 Δs 满足

$$\left|\frac{\Delta s}{s}\right|\le\left|\frac{\Delta a}{a}\right|+\left|\frac{\Delta b}{b}\right|+\left|\frac{\Delta c}{c}\right|$$

1.15 设 $P\in R^{n\times n}$ 且非奇异，又设 $\|x\|$ 为 R^n 上的一种向量范数，定义

$$\|x\|_P=\|Px\|$$

试证明 $\|x\|_A$ 为 R^n 上的一种向量范数。

1.16 设 $A\in R^{n\times n}$ 为对称正定矩阵，定义 $\|x\|_A=(Ax,x)^{1/2}$

试证明 $\|x\|_A$ 为 R^n 上的一种向量范数。

1.17 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0.6 & 0.5\\ 0.1 & 0.3\end{pmatrix}$

计算A的行范数，列范数，2范数及F范数。

1.18 证明 $\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{n}\,\|A\|_2$，并说明 $\|A\|_F$ 与 $\|x\|_2$ 相容。

1.19 设 $P\in R^{n\times n}$ 且非奇异，又设 $\|x\|$ 为 R^n 上的一种向量范数，定义范数 $\|x\|_P=\|Px\|$。证明对应于 $\|x\|_P$ 的算子范数 $\|A\|_P=\|PAP^{-1}\|$。

1.20 设A为非奇异矩阵，求证

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|_\infty}=\min_{y\neq o}\frac{\|Ay\|_\infty}{\|y\|_\infty}$$

1.21 设A为n阶方阵，U为n阶正交阵，试证

$$\|AU\|_2=\|UA\|_2=\|A\|_2$$

$$\|AU\|_F=\|UA\|_F=\|A\|_F$$

1.22 对算子范数，设 $\|B\|$<1，求证：

$$\frac{1}{1+\|B\|}\le\|(I\pm B)^{-1}\|$$